# ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL USO DE MODELOS ALTERNATIVOS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON ESTUDIANTES DE PRIMER CURSO DE CICLO COMÚN.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
"FRANCISCO MORAZÁN"

VICERRECTORÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL USO DE MODELOS ALTERNATIVOS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON ESTUDIANTES DE PRIMER CURSO DE CICLO COMÚN

**Tesis**
**Para obtener el título de Master en Educación Matemática**

Presentada por:

MARIO ROBERTO CANALES VILLANUEVA

ASESORA

MSC. .MAGDALENA ALVARADO

SAN PEDRO SULA ,JULIO DEL 2006

## DEDICATORIA

**Este trabajo se lo dedico a toda mi familia.**

**A Marta mi esposa por el apoyo que me brindó todo el tiempo.**

**A mis hijos Ayza, Ian y Drassen, por las innumerables horas que les quité para culminar mi trabajo.**

**“Mira papá, en la escuela soy muy bueno en aritmética. Puedo sumar, restar, multiplicar, dividir y hacer otras operaciones, la que se te ocurra, muy rápido y sin errores. El problema es que ha menudo no sé cuál usar”.**

**Wertheimer (Citado por Abrantes y otros, 2002, 13)**

## AGRADECIMIENTO

A las autoridades de la Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán" Centro Universitario Regional, por el apoyo incondicional para culminar mis estudios de Postgrado.

A MSC. Magdalena Alvarado por el tiempo que dedicó para culminar con este trabajo.

A Dr. Adalid Gutiérrez, Dr. Oscar Montes por los valiosos aportes que me brindaron en las clases de la especialidad.

**Mario Roberto Canales**
**TESISTA**

INDICE

# INTRODUCCIÓN

Algunos autores como Maza, Rico, Vernaud, opinan que el aprendizaje de las cuatro operaciones básicas con números naturales conlleva muchas dificultades, parte de esto se confirma con una prueba diagnóstica que se aplicó en el Instituto "José Trinidad Reyes" desde 1999 hasta el 2005. Los resultados obtenidos nos ayudan a reforzar esa hipótesis.

También de los trabajos de esos autores, se sabe que se hacen esfuerzos por ayudar al estudiante a superar esos problemas, y un camino a seguir es tratar de enseñar a los estudiantes métodos alternativos para resolverlos, principalmente en la multiplicación y división, ya que estas dos operaciones son las que mayor dificultad presentan al alumno. Esta dificultad presentada condujo a experimentar con la enseñanza de métodos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones con estudiantes de primer curso de ciclo común de dicho Instituto.

Para comprender la importancia de la enseñanza de éstos métodos alternativos se utilizó la historia de la matemática, para extraer de ella las distintas etapas que transcurrieron en estos dos algoritmos hasta llegar a su estado actual. Tomando en consideración su evolución, nos ayuda a conocer el pensamiento matemático que estuvo involucrado en la concepción de los mismos. Su enseñanza trae consigo cambios de pensamiento, para ello es necesario considerar el problema presentado y tratar de solucionarlo. Lograr esto, me motivó a realizar el presente trabajo.

Los resultados se presentan en este documento que consta de 5 capítulos:

En el capítulo I se hace la presentación y justificación del problema, los objetivos generales y específicos.

En el capítulo II se presenta el marco teórico en donde se desarrolla la teoría del aprendizaje de los conceptos aritméticos, se define el concepto de algoritmo, luego se describen las investigaciones relacionadas que argumentan que los algoritmos tradicionales son perjudiciales para el alumno, continuando con la incursión a través de la historia para justificar los modelos alternativos y por último se describen los modelos alternativos encontrados. En el capítulo III se describe la metodología utilizada en la investigación, donde se da a conocer el tipo de estudio realizado, los participantes, los instrumentos utilizados y como se procesarán los resultados. Además se describen los modelos alternativos utilizados en la experimentación.

En el capítulo IV se presentan los resultados de la experimentación considerando la prueba diagnóstica, las guías diagnósticas, las guías de trabajo y la evaluación final. En el capítulo V se dan a conocer las conclusiones y sugerencias obtenidas en esta investigación.

# CAPITULO I

## 1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La base fundamental de la aritmética se enseña en la escuela primaria, donde se estudian las operaciones básicas con números naturales, enteros, fracciones y decimales. Su buena comprensión permite que el estudiante tome con mejores posibilidades las demás etapas del aprendizaje de la matemática.

Cabe destacar que el aprendizaje significativo de la aritmética viene a constituir el pilar de la construcción de la matemática que el niño estudiará a lo largo de su vida, y como prioridad podemos señalar que el estudio significativo de las operaciones básicas con números naturales es fundamental para el estudio de los demás conjuntos numéricos.

Por esta razón se destaca que la enseñanza de las operaciones básicas con números naturales es prioridad en los primeros años de la escuela primaria, el poco dominio de las mismas puede llevar al niño a futuros fracasos que serán relevantes en su vida estudiantil. Esto es confirmado por Von Glasersfeld citado por Klingler y Vadillo (1998: 141) que asevera que la forma de enseñar matemáticas ha generado el resultado opuesto al deseado: "en lugar de despertar interés, ha provocado una aversión duradera hacia los números".

Para verificar lo anterior, se aplicó una prueba diagnóstica a los estudiantes de primer curso del Instituto José Trinidad Reyes, ésta nace de la curiosidad personal que se despertó a raíz del paro de labores que se produjo por el Huracán Mitch en 1998, y que tienen como propósito indagar si el dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales era óptimo por estos estudiantes, luego la misma se ha aplicado año con año hasta la fecha. La prueba contenía los siguientes ejercicios con números naturales:

| | |
|---|---|
| 1) 12, 459 + 3, 798 + 603 | 2) 124, 829 + 36 + 4, 765 + 9003 |
| 3) 12, 001 – 7493 | 4) 6, 749 – 3, 0 74 |
| 5) 342 x 28 | 6) 1, 302 x 301 |
| 7) 8493 ÷5 | 8) 34, 381 ÷ 54 |

El objetivo era medir el dominio que los estudiantes tienen de las cuatro operaciones básicas con números naturales. Los resultados son los siguientes:

**Tabla. nº1**

| | Preguntas | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Año | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | n. estudiantes |
| 1999 | 64% | 52% | 26% | 68% | 49% | 33% | 65% | 27% | 228 |
| | | | | | | | | | |
| 2000 | 53% | 48% | 23% | 66% | 55% | 31% | 57% | 29% | 285 |
| | | | | | | | | | |
| 2001 | 62% | 51% | 26% | 74% | 59% | 35% | 67% | 21% | 121 |
| | | | | | | | | | |
| 2002 | 67% | 51% | 30% | 74% | 59% | 40% | 62% | 27% | 662 |
| | | | | | | | | | |
| 2003 | 60% | 42% | 27% | 74% | 53% | 38% | 65% | 30% | 723 |
| | | | | | | | | | |
| 2004 | 56% | 39% | 34% | 70% | 59% | 45% | 71% | 35% | 414 |
| | | | | | | | | | |
| 2005 | 66% | 50% | 36% | 77% | 57% | 46% | 68% | 33% | 404 |
| | | | | | | | | | |

. Porcentaje de aciertos en la prueba diagnóstica aplicada

en el periodo de 1999-2005

En la tabla se puede observar que los ejercicios 8, 3, 6, 2, 5 en ese orden, son los que presentan porcentajes de éxito menores de 60%.

Al respecto, se puede establecer que la resta, la multiplicación y la división son de las cuatro operaciones básicas con números naturales las que más dificultades presentan al estudiante. Y el problema es aún más serio, ya que la prueba diagnóstica ha sido aplicada a alumnos que ya tienen culminado su ciclo en la escuela primaria, y que comienzan su educación secundaria. Según los estándares de la escuela primaria estos estudiantes deberían manejar, aplicar, conocer con plenitud las operaciones básicas de los conjuntos de los números naturales y racionales, incluyendo los decimales. Sin embargo la realidad es otra.

Los bajos niveles de acierto durante esos 7 años, son los que han llevado a investigar si existe un modelo matemático que propicie que los estudiantes corrijan esos errores que se han producido continuamente.

## 1.2. JUSTIFICACIÓN

Las finalidades a satisfacer, que justifique la presencia de las matemáticas en la educación obligatoria, según Rico (1998: 26), responden a tres tipos de argumentos:

a) Se considera que las matemáticas tienen un alto valor formativo porque desarrollan las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan el pensamiento formal. En este sentido las matemáticas son valiosas ya que deben lograr mentes bien formadas, con una adecuada capacidad de razonamiento y organización.
b) Tienen interés por su utilidad. Las matemáticas aparecen en la práctica totalidad de las formas de expresión humana, permite codificar información y obtener una representación del medio social y natural, suficientemente potente como para realizar una actuación posterior sobre el medio.
c) Las matemáticas proporcionan, junto con el lenguaje, uno de los hilos conductores de la formación intelectual de los alumnos.

Debido a estos tres argumentos se puede destacar que la aritmética es uno de los pilares fundamentales en la educación primaria, y este se puede justificar por dos razones de acuerdo a Gómez:

a) El aprendizaje de la aritmética es un hecho social, determinado por el grado de evolución y desarrollo de cada sociedad. (1998: 60)

b) El aprendizaje de la aritmética es un conocimiento socialmente útil ya que es una de las formas básicas de razonamiento; sistematiza el estudio de las cantidades, su simbolización y sus relaciones (1998: 59).

De acuerdo a lo anterior, Rico (1998: 26) expresa que “se puede considerar que la madurez alcanzada por cada niño a lo largo de su formación escolar tienen dos indicadores principales:

su capacidad de expresión verbal, que se pone de manifiesto en su dominio del lenguaje, y su capacidad de razonamiento, expresada en las matemáticas"

Nuestro país ha sido evaluado internacionalmente en estos dos aspectos, de lo cuál según el informe del Progreso Educativo de Honduras (2001: 11), nuestro país ocupa el penúltimo lugar en cuanto a conocimiento de la matemática en su nivel primario, situación que preocupa a toda la comunidad en general.

El informe nacional de rendimientos académicos de tercero y sexto grados (UMCE, 2002 a: 3) presenta entre sus hallazgos principales lo siguiente:
"En el paso de tercero a sexto grado los alumnos mejoran su rendimiento en Español y Ciencias Naturales, pero lo empeoran en Matemáticas"

Los diagnósticos realizados en los años 1999- 2005 a los estudiantes que ingresan al Instituto Departamental "José Trinidad Reyes" reflejan un alto índice de reprobación, dicho diagnóstico solo enmarca el conocimiento que el estudiante tiene en las operaciones básicas con números naturales.

El dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales constituye la base fundamental que debe poseer todo estudiante para triunfar en su primer año de secundaria, ya que según los Rendimientos Básicos aún se contempla el estudio de la aritmética elemental. Este año es primordial en la vida educativa del estudiante porque aquí es donde el enfrentará por primera vez los conocimientos adquiridos frente a un nuevo reto educativo. La idea anterior es compartida por la NCTM cuando cita a Fuson (NCTM, 2000: 149) diciendo: "el estudiante que entienda la estructura de números y las relaciones entre ellos, puede trabajar con éstos de una manera más fácil".

Sin embargo el fracaso del alumno en la prueba diagnóstica refleja que la enseñanza de las operaciones básicas con números naturales todavía no ha alcanzado el nivel óptimo que se pretende conseguir, la transmisión de conocimientos para el desarrollo de habilidades no resolvió los problemas de aprendizaje en el nivel primario, y mucho menos resolvió lo que se refiere a la adquisición de conceptos. Los errores conceptuales cometidos por la mayoría de alumnos confirman la ineficacia de estrategias de trasmisión de conocimientos, principalmente a lo que se refiere a operaciones con números naturales.

Esta dificultad, según Castro (2001: 210) no es un hecho nuevo ya que históricamente la multiplicación y la división han sido consideradas como más difíciles de aprender y, aunque estén ligadas a la adición y a la sustracción, las ideas que conllevan una multiplicación y la división son más complejas que las de la adición y la sustracción.

Sustentando lo anterior, en el Informe Departamental de Cortés de Rendimiento Académico (2002 b: 58) nos dice que una de las competencias donde se observa mayor problema es la relacionada con la "resolución de problemas utilizando los algoritmos de multiplicación y división de números naturales".

Los datos obtenidos en dicho informe (2002 b: 60), son los siguientes:

**Tabla nº 2**.

| **En el Departamento de Cortés** | | | | **A nivel Nacional** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nulo | Insuficiente | Básico | Avanzado | Nulo | Insuficiente | Básico | Avanzado |
| 48.27 | 35.19 | 12.57 | 3.97 | 44.04 | 35.39 | 15.32 | 5.24 |

Comparación de rendimientos del Departamento de Cortés y El rendimiento Nacional.

En la tabla 2, se observa que la tendencia en el departamento de Cortés con el del Nivel Nacional muestra deficiencias significativas. Esto significa que existen problemas tanto a nivel de Cortés como a nivel Nacional en esta competencia.

De aquí que los profesores con frecuencia observan y exponen las grandes deficiencias que tienen los estudiantes en cuanto a dominio de las multiplicaciones y las divisiones, así que una imperiosa necesidad de elevar el nivel de rendimiento, ha orillado a la búsqueda de nuevas estrategias didácticas que resulten más prácticas para construir y establecer las bases matemáticas.

En la actualidad los estudiantes siguen memorizando las tablas y los procedimientos para resolver las multiplicaciones y las divisiones, sin lograr la comprensión real de lo que ellas implican o las posibilidades que su dominio brinda.

Lo anteriormente descrito permite plantear el siguiente problema:
**1. Deficiencias en el aprendizaje de los algoritmos de la multiplicación y división en los alumnos del primer curso del ciclo común.**

Como **objeto de investigación** en el presente trabajo se considera **el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos matemáticos en el primer curso del ciclo común,** y como **campo de acción** en el cual se concretará el trabajo **el proceso de enseñanza aprendizaje de la multiplicación y división en el primer curso del ciclo común.**

El objetivo que conduce la investigación es **explorar si es posible corregir los errores que los estudiantes cometen tan continuamente, al multiplicar y dividir con números naturales.**

Bajo este contexto se propusieron las siguientes preguntas de investigación:

**¿Cómo favorecer el aprendizaje significativo de los algoritmos de la multiplicación y la división?**

Derivándose de esta pregunta general, las siguientes preguntas específicas:
**¿Los estudiantes de primer curso son capaces de comprender otros modelos de multiplicación y división?**
**¿Que modelos alternativos para multiplicar y dividir prefieren ellos?**
**¿En una situación problemática utilizaran esos modelos para resolver multiplicaciones y divisiones?**

A partir de esas preguntas se planteó el siguiente **Objetivo general**:

**1. Explorar otros modelos didácticos orientados a favorecer el aprendizaje significativo de los algoritmos de la multiplicación y la división.**

Y los siguientes **objetivos específicos** de investigación:

1. Determinar si los estudiantes de primer curso son capaces de comprender los modelos alternativos para multiplicar y dividir.
2. Describir el desempeño de ese grupo de estudiantes al utilizar modelos alternativos para multiplicar y dividir.
3. Determinar cuáles son los modelos alternativos que ellos mejor comprendieron.
4. Determinar si en una situación problemática los estudiantes son capaces de utilizar modelos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones.

# CAPITULO II

# MARCO TEORICO

## 2.1 APRENDIZAJE DE CONCEPTOS ARITMÉTICOS.

**Teorías psicológicas con influencia en la enseñanza de la aritmética en nuestro país.**

No todos los autores están de acuerdo en lo que significa aprender matemáticas, ni en la forma en que se produce el aprendizaje. Castro (2001: 42) argumenta que "La mayoría de los que han estudiado el aprendizaje de las matemáticas coinciden en considerar que ha habido dos enfoque principales en las respuestas a estas cuestiones. El primero históricamente hablando tiene una raíz conductual, mientras que el segundo tiene una base cognitiva"

Dentro de la escuela conductista, se puede mencionar la teoría psicológica del asociacionismo, esta tendencia conductual sobre el aprendizaje de la matemática considera que aprender es cambiar conductas, insiste en el desarrollo de destrezas de cálculo y dividen estas destrezas en pequeños pasos para que, mediante el aprendizaje de destrezas simples, se llegue a aprender secuencia de destrezas más complejas. Uno de los autores principales de está teoría es E.L. Thorndike, que según Resnick y Ford (1998: 26) es el padre fundador de la psicología de la enseñanza matemática. Para estas autoras (1998: 27), la aportación principal de Thorndike a la psicología es su enunciado de la *ley del efecto*, que él mismo formuló y que afirma que "cuando se realiza una conexión modificable entre una situación y una respuesta, y dicha conexión está acompañada o seguida de un estado de cosas satisfactorias, se aumenta la fuerza de dicha conexión; cuando se realiza y está acompañada o seguida de un estado de cosas molesto, su fuerza disminuye"

En cuanto al aprendizaje de la aritmética, Thorndike creía que los profesores necesitaban descubrir y formular determinados vínculos que conformaban la aritmética. Esto conformaba un sistema de ejercicios y de práctica en donde los vínculos importantes se deben de practicar más y los de menor importancia, con menos frecuencia.

Todo esto llevaba al profesor a ofrecer adecuadas cantidades de ejercicios en un orden apropiado, identificando los vínculos, ordenándolos de tal manera que los más sencillos sirvieran para facilitar el aprendizaje de los más difíciles.

Así, un alumno ha aprendido la multiplicación o la división si las realizan correctamente. Como el concepto matemático de la multiplicación es muy complejo, para aprenderlo los asociacionistas lo descomponen en unidades elementales:

1. Memorizar las tablas de multiplicación por una cifra.
2. Realizar las multiplicaciones de un número de una cifra por otro de dos, sin llevar.
3. Realizar las multiplicaciones de un número de una cifra por otro de tres, sin llevar.
4. Realizar las multiplicaciones de un número de una cifra por otro de dos, llevando.
5. Realizar las multiplicaciones de un número de una cifra por otro de tres, llevando.

Luego se generaliza este proceso a la multiplicación por dos cifras, luego por tres o cualquier número de cifras. Este proceso se completa a lo largo de varios años, y hace separaciones conceptuales, como creer que dividir por una cifra es distinto que dividir por dos cifras, esa separación conceptual luego tendrá repercusiones en los estudiantes.

Otra de las teorías asociacionistas más significativas en relación al aprendizaje de las matemáticas es la de Gagné, la teoría del aprendizaje acumulativo, en la cuál las tareas más sencillas funcionaban como componentes (elementos) de las tareas más complejas (teoría de los elementos idénticos). Para ello este autor trata de establecer jerarquías de aprendizaje en la cual se organizan las lecciones de acuerdo con la complejidad de las tareas, para lograr un mayor número de éxitos.

De esta forma, según Gagné (citado en Resnick y Ford, 98: 60) "una jerarquía se genera considerando la tarea-objetivo y preguntando: "¿Que tendría que saber hacer (el niño) para realizar esta tarea si sólo hubiera recibido las instrucciones?". Éstas son organizadas jerárquicamente y a esto Gagné le llamaba secuencia de instrucciones, que según Castro (2001: 44) es una cadena de capacidades o destrezas ligadas a la capacidad superior que se quiere lograr.

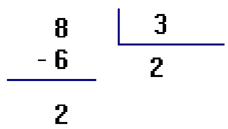
Un ejemplo dado por Castro (2001: 45) de una jerarquía de aprendizaje podría ser ligada al aprendizaje de la división. Teniendo en cuenta que se identifica aprender a dividir con saber realizar divisiones mediante el algoritmo de lápiz y papel, los pasos que se dan en esta jerarquía tienen que ver con los siguientes elementos:

1. Prerrequisitos: sumar, restar y multiplicar correctamente con números naturales.
2. Concepto: algoritmo de lápiz y papel de la división.
3. Jerarquías de tareas a realizar:

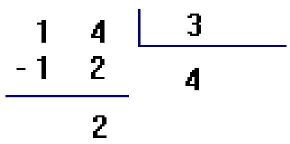
   a) Identificar el número que multiplicado por otro da un número. ( ¿Cuál es el número que multiplicado por 3 da 6? )

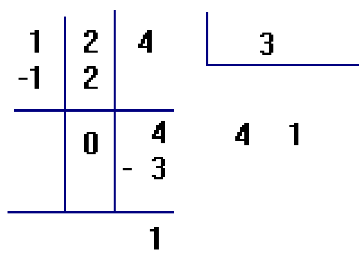
   b) Identificar el número que multiplicado por otro dado da el número menor más próximo a otro número. ( ¿Cuál es el número que multiplicado por 3 da 8: " 8 entre 3 a cuánto cabe"?)

   c) Situar estos cálculos en el diagrama de la caja, colocando además el producto próximo y el resultado de restar:




   d) Aumentar el número de cifras del dividendo; realizar las tareas anteriores, introduciendo un encolumnado para situar las cifras que van resultando:




   e) Aumentar las cifras del divisor: dividir por dos cifras, por tres cifras, etc.

Considerando lo anterior, el programa los Rendimientos Básicos y el Currículo Nacional Básico propuesto por el FONAC, siguen esta tendencia.

En este caso, para la multiplicación se pretende que el niño en segundo grado se aprenda las tablas y comience a dividir sin residuo, unidad entre unidad y decena unidad entre unidad sin residuo (C.N.B.: 354). Para el tercer grado debe de aprender a multiplicar D0 x U sin llevar, C00 x U sin llevar y DU x U llevando, para la división DU ÷ U sin residuo y con residuo, CDU ÷ U sin y con residuo y MCDU ÷ U sin y con residuo (C.N.B.: 382). Y así sucesivamente. Todo esto en el marco asociacionistas, con tendencias a la utilización de las jerarquías de aprendizaje, ya que sugieren que el estudiante "comprenda el concepto estar contenido en" (C.N.B.: 365). Como puede observarse, siempre se mantiene la enseñanza tradicional de los algoritmos de multiplicación y división.

En la actualidad, las nuevas teorías van poco a poco desfasando el concepto conductista, dando origen al aprendizaje significativo, siendo su principal autor David Ausubel, de acuerdo con este autor, un aprendizaje es significativo cuando los nuevos contenidos se relacionan con un concepto relevante preexistente en la estructura cognitiva. Arancibia (1999: 85) define una estructura cognitiva como el conjunto de ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento. El aprendizaje significativo implica que las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos y proposiciones estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo.

Las ventajas del aprendizaje significativo son:

1. Produce una retención más duradera de la información.
2. Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriores, que a su vez es guardada en la memoria de largo plazo.
3. Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del estudiante.
4. La significación del aprendizaje depende de los recursos cognitivos del estudiante.

Considerando el aprendizaje de la multiplicación, se utilizará el concepto de la suma y para la división se utilizaran los conceptos de suma, resta y multiplicación. Estos serán la base para los modelos alternativos. Considerando la definición de algoritmo, en la próxima sección trataremos de establecer lo que es un algoritmo tradicional y uno no tradicional.

## 2.2 LOS ALGORITMOS

Etimológicamente la palabra algoritmo procede de la latinización del nombre del matemático persa Al Khwarizmi, autor del libro " Algoritmi de numero indorum" que es considerado como la mayor contribución a la divulgación en occidente de los métodos y numerales, guarismos del sistema numérico índico, llamado indo-arábigo.

Para Steen (1998: 13) los algoritmos son prescripciones para realizar cálculos que ocurren en todos los rincones de la matemática. En la actualidad, la forma de comprobar el conocimiento adquirido y la puesta en práctica de ese conocimiento es la noción de algoritmo, al respecto algunos autores tratan de definirlo, luego tenemos:

1. Vernaud (2003: 258) sostiene que es una regla (o conjunto de reglas) que permite, para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución, si existe una, o, dado el caso, mostrar que no hay solución.
2. Alfonso (1998: 105) piensa que es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza (sin indeterminación ni ambigüedades) en un número finito de etapas a ciertos resultados, y esto independientemente de los datos.
3. Para Fey (1998: 84) es una secuencia de reglas definidas con precisión que indican cómo producir la información de salida especificada a partir de la información de entrada dada un número finito de pasos.

Históricamente, los algoritmos en su origen fueron los que se elaboraron para resolver las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir, sin emplear elementos auxiliares como el ábaco o los dedos. A éstos se le llama actualmente algoritmos de papel y lápiz, por ser indispensable estos dos elementos para realizar las operaciones necesarias para llegar a la respuesta buscada. Esta denominación es la que se emplea para referirnos a los algoritmos usuales. Veamos a que se refiere con algoritmos de papel y lápiz.

## 2.3 LOS ALGORITMOS DE PAPEL Y LÁPIZ

Estos se clasifican en dos grupos: tradicionales o usuales y no tradicionales o alternativos.

### 2.3.1 Los algoritmos tradicionales

Dentro de los algoritmos tradicionales, podemos considerar aquellos que evitan esquemas distintos, en cuanto a las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, los autores Castro, Rico, Castro (1995: 23) opinan que "son aquellos en la que su presentación se colocan los números de manera consecutiva, en un orden creciente y en posición vertical, excepto para la división, en donde el divisor se coloca a la derecha del dividendo y separado de él por una caja. En las primeras se opera de derecha a izquierda en todos los casos, es decir comenzando la operación por las unidades de orden inferior y avanzando consecutivamente a las de mayor orden; de nuevo la división presenta una excepción inicial ya que se comienza a dividir por las cifras de mayor orden, pero a partir de ahí el esquema se coordina con el de las demás operaciones ya que la cifra del cociente se multiplica por el divisor de modo creciente y se va restando del divisor en el mismo orden".

Según Gómez (1998: 106) las características principales de estos algoritmos son:

- ❖ Escritos, en el sentido de que permanecen sobre el papel y pueden ser corregidos.
- ❖ Regulares o estándares. Todo el mundo los hace igual.
- ❖ Abreviados. Resumen varias líneas de ecuaciones ocultando pasos que tienen que ver con las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva.
- ❖ Automáticos. No hace falta pensar, ni reflexionar. Ni siquiera necesitan ser comprendidos para poder ser ejecutados.
- ❖ Simbólicos. Se trata de manipular símbolos sin referencia alguna al mundo real.
- ❖ Generales, en el sentido que funcionan con cualquier número.
- ❖ Analíticos. Los números se consideran rotos, descompuestos. Las cifras se manipulan separadamente.
- ❖ Tradicionales. Son " los de toda la vida"
- ❖ De confianza. Porque siempre funcionan.

- ❖ Familiares. Son los nuestros, los de nuestros padres y abuelos.

Esta caracterización se resume en tres pasos, de acuerdo con Castro (1995: 20):

- ❖ Nitidez: Gracias a esta propiedad la realización del algoritmo se transforma en un proceso mecánico.
- ❖ Eficacia: Conduce a los resultados deseados mediante un número finito de pasos, suficientemente simples.
- ❖ Universalidad: El mismo algoritmo se aplica a todas las situaciones de una misma clase.

Como consecuencia de estas características, los algoritmos tradicionales han provocado qué el aprendizaje ligue directamente cada operación a su algoritmo, confundiendo cada operación con el algoritmo que usualmente lo resuelve. Pero no solamente ese es el problema, en la siguiente sección se justifica los otros problemas que conlleva el aprendizaje de los algoritmos tradicionales.

### 2.3.2 La enseñanza de los algoritmos tradicionales

La enseñanza de los algoritmos tradicionales se ha cultivado durante mucho tiempo, es la que pone énfasis en el dominio y ejecución de las operaciones aritméticas básicas, lo cual se ha traducido en una gran inversión de tiempo (desde el primer grado hasta el séptimo grado) y esfuerzo por parte de los profesores para que los estudiantes logren un manejo aceptable de los algoritmos en la ejecución de las operaciones.

Santos Trigo (1997: 71) opina que la tendencia de enseñar tradicionalmente los algoritmos fue porque se tenía la creencia que dominar las operaciones aritméticas y aprender una serie de algoritmos era un indicador fundamental de ser competente en matemáticas. Así, quien repetía las tablas de multiplicar y podía hacer operaciones aritméticas largas gozaba del prestigio de ser bueno en matemáticas.

Kaplan , Yamamoto y Ginsbrurg (1989: 114) creen que no se puede negar que se considera el aprendizaje de cálculos numéricos como esencial para la enseñanza de la matemática elemental, porque el dominio de cuestiones numéricas es la base para las habilidades del cálculo más avanzado, y aportando a la misma idea Castelnuovo (2001: 48) considera además que se debe reconocer que la aritmética es la base intelectual de todos los estudios matemáticos. Bruner (citado por Castro, Rico, Castro, 1996: 45) es de la opinión que los grandes conceptos de la aritmética forman parte del equipo de instrumentos que sirven para pensar.

Para Kamii (1995: 33) el problema es que la aritmética ha sido siempre enseñada a través de los algoritmos tradicionales como si fuese un conocimiento social y/o físico, por ejemplo la forma vertical de escribir problemas de multiplicación es un conocimiento social que los niños no han inventado, para la misma autora (1995: 18), éste ha sido proporcionado al niño como un acuerdo de la sociedad, es decir como un conocimiento social ya que parece ser la única forma de aceptar que una multiplicación o una división fuese la tradicional, y ésta a su vez llega a la mente como un objeto externo, esto supone un conocimiento físico.

Keitel (1998: 70) afirma que está claro que hay pocas dificultades para formar a los estudiantes en cuanto se refiere a la aplicación técnica de los algoritmos y procedimientos, por aburridos que puedan ser. Como consecuencia de ello, según Kaplan, Yamamoto y Ginsburg (1989: 110) los niños suspenden el pensamiento matemático razonable para memorizar un conjunto de algoritmos aparentemente absurdos y arbitrarios y esto lleva a que la mayoría de los estudiantes no comprenda lo que está haciendo, ya que según Carbo y Gracia (2004: 63), la simbología y los algoritmos se han introducido desde una perspectiva adulta.

De acuerdo con las investigaciones realizadas por algunos autores, que se mencionarán a continuación, la enseñanza de los algoritmos tradicionales en los primeros cursos es perjudicial, veamos cuales son las consecuencias de esto:

Kami (1995: 49) encuentra cinco problemas:

1. Los algoritmos fuerzan a los niños a renunciar a su propio pensamiento..
2. Los algoritmos "malenseñan" el valor posicional e impiden que los niños desarrollen el sentido de número.

3. Los algoritmos hacen que los niños dependan de la distribución espacial de las cifras (o papel y el lápiz) y de otras personas.
4. El objetivo a corto plazo en enseñar algoritmos, está en contradicción con la meta a largo plazo de desarrollar la autonomía y el conocimiento lógico matemático de los niños.
5. Impide al niño pensar de manera crítica y autónoma. (1994 a: 73)

Y los otros problemas son:

6. Los algoritmos producen dificultad en la resolución de problemas.
7. Para Brosseau (2000: 13) separa el aprendizaje del algoritmo, del aprendizaje de su sentido.
8. Kaplan, Yamamoto, Ginsburg (1989: 111) opinan que la verificación de las respuestas obtenidas algorítmicamente por parte de los niños es imposible
9. Para estos mismos autores (1989: 112) creen que llevan a pensar en que la solución es única.
10. Para Segarra (2002: 40) estimula el cálculo rutinario y para Cedillo (1999: 17) propicia el aprendizaje mecanicista que parece no favorecer la comprensión de conceptos ni un uso eficiente de la aritmética para resolver problemas.
11. Perkins y Simmons (citado por Trigo, 1997: 43) opinan que crean tipos de patrones de falso aprendizaje
12. La enseñanza por medio de los algoritmos no une la estructura de las cuatro operaciones básicas.
13. El Grupo Azarquiel (1993: 139) opina que el carácter algorítmico impide el transito de la aritmética al álgebra.

De mi experiencia profesional, he podido constatar que los estudiantes presentan las dificultades expresadas anteriormente. Es muy frecuente la pregunta: ¿Porqué no pueden resolver problemas?, ¿Por que es difícil el álgebra?, entre otras. Y de acuerdo con los autores citados, parece ser que una consecuencia de esta situación es la enseñanza de los algoritmos tradicionales. En el estudio se presentaran elementos que aportan evidencia de ello.

### 2.3.3 Los algoritmos alternativos

Dentro de la concepción de los algoritmos tradicionales, se hace la consideración que es la única manera de resolver cálculos numéricos, sin embargo existen otros modelos o técnicas para llegar a las mismas respuestas, esas otras técnicas son llamadas no tradicionales o alternativas, estos rompen con el esquema operacional planteado desde hace mucho tiempo.

Esto no es nuevo, según Fuson citado por Peñafiel, (1996: 95), los niños antes de entrar a la escuela descubren e inventan sus propias matemáticas, para Kamii (1995: 50) ellos utilizan métodos informales o alternativas. Pero, Kaplan, Yamamoto,Ginsburg (1989: 122) sostienen que una vez que llegan a la edad escolar y aprenden la aritmética escrita, su matemática informal desaparece, o bien los niños olvidan como usar esas habilidades, o se doblegan ante la presión de enfoques educacionales convencionales.

Martí (2002: 14) argumenta que esto lleva a los niños a la costumbre de repetir solamente la información brindada por el maestro, lo que produce una separación entre los procedimientos propios y los nuevos que se adquieren, lo cual se vuelve nefasto para su formación matemática, los hace asumir que la matemática no es necesario comprenderla, pero si indispensable saber un solo procedimiento para llegar a la única respuesta correcta.

Para Lester ( citado por Trigo, 1997: 26) la causa de que esto suceda es que los maestros muestran a los niños solamente movimientos correctos al resolver un problema, siempre seleccionando el método adecuado, trabajando correctamente las operaciones para obtener una solución correcta, y según Kamii (1994 a : 69) esto no estimula en los niños a pensar de una manera autónoma. Klingler y Vadillo (1999: 140) añaden que su conocimiento informal es un tipo de andamiaje para el aprendizaje escolar.

Como consecuencia de ello, Roldan, García y Cornejo (1996: 40) sostienen que se contradice la premisa de que la educación primaria debe ser formativa más que informativa, en la cual el propósito del maestro debe ser el despertar en los niños el interés para buscar y aplicar diferentes alternativas en la solución de un problema aritmético, desarrollando su capacidad para que con mente abierta aborden estos niveles de complejidad, evitando la memorización, que por difícil y rutinaria que parezca, genera en el alumno apatía y enemistad con la matemática. Según Martí (2002: 16) la aritmética pierde su significado para convertirse en un desencadenante de operaciones sin sentido.

Para recuperar el significado de la matemática se debe recurrir a los algoritmos alternativos, ya que los tradicionales no brindan las oportunidades para desarrollar el pensamiento matemático. De aquí que los algoritmos alternativos jugarán un papel importante, no sólo en el aprendizaje de técnicas de cálculo, sino también en las situaciones que requieran cálculos, fuera del ámbito escolar.

Con el objeto de que se produzca un aprendizaje significativo, Baroody (citado por Chamorro, 2003: 147) presenta las siguientes recomendaciones:

- Desarrollar una base sólida (comprensión informal) antes de introducir símbolos escritos, de manera que la matemática más formal pueda conectarse con algo significativo.
- Estructurar experiencias informales de cálculo para fomentar el aprendizaje por descubrimiento. Las técnicas definitivas, por su carácter automático, no están diseñadas para ser aprendidas. La justificación de muchos de sus procesos sólo será posible en el alumno si las relaciona con determinadas técnicas informales o alternativas.
- Ayudar a los niños a ver que el simbolismo formal es una expresión de su conocimiento informal. Y no sólo es una expresión, sino que es una importante ayuda en su progresiva mejora de estrategias informales de cálculo.
- Estimular la comprensión de los cálculos escritos contrastando los resultados obtenidos con ellos, con los obtenidos mediante procedimientos informales.
- La enseñanza de apoyo debe centrarse en estimular la comprensión del procedimiento correcto, además de su aprendizaje.
- Prever la necesidad de un periodo largo para el cálculo y el descubrimiento.

Este aprendizaje significativo se verá reflejado cuando el niño comience a conocer y a aplicar de manera correcta todas las propiedades numéricas que están inmersas en la aplicación de los algoritmos, que desde luego se lograrán una vez que el estudiante comience a aplicar algoritmos alternativos, que por su naturaleza estimulan la creatividad del estudiante.

De estas observaciones se desprenden tres corrientes citadas por Kamii (1994 b: 65);

1) Lankfort (1974) y la N.C.T.M. (1989) abogan por la enseñanza de los algoritmos junto con el empleo de métodos alternativos.
2) Otros han puesto en duda la conveniencia de enseñar algoritmos tradicionales. En Brasil con Carraher,Carraher y Schilemann (1987) y en Inglaterra Jones (1975).
3) Y un tercer grupo aboga para que se cese de enseñar algoritmos tradicionales En U.S.A. con Burns (1992a, 1992, 1993); Madell (1985), en Dinamarca con Bennedeck (1981), En Inglaterra con Plunkett (1979), Holanda con Treffers (1987), Sudáfrica con Murria y Olivier, (1989).

Para profundizar en la idea de abandonar la enseñanza de los algoritmos tradicionales, existen dos estudios que sugieren que otros modelos alternativos son mejores:

1. Según los trabajos de Mochon y Román (1995: 105), cuando los estudiantes contestaron con la ayuda del algoritmo de papel y lápiz, se equivocaron con mayor frecuencia que cuando respondieron con estrategias de cálculo mental
2. Según el trabajo de Kamii (1994 b: 210), los niños que estuvieron en clases constructivistas, al finalizar su segundo año de estudio simplemente ya no cometían errores relacionados con el valor posicional. Sin embargo la mayoría de los niños que habían aprendido algoritmos tradicionales llegaron a tercer curso con graves problemas para operar.

Los modelos de enseñanza de la matemática que se implementan en Honduras, se centran exclusivamente en la enseñanza de las operaciones básicas con números naturales por medio de algoritmos tradicionales, lo que puede hacernos concluir en principio que los docentes han limitado el pensamiento crítico y autónomo de los estudiantes, y esta situación ha llevado al bajo nivel de aceptación en las investigaciones realizadas en tercer y sexto grado por parte de la UMCE, por lo que es necesario abandonar esas estrategias de enseñanza y apostar por los métodos alternativos.

Según Kamii (1994 a: 87), las metas generales para la enseñanza de la aritmética deban ser:

1. Que los niños piensen por su cuenta y desarrollen confianza en su propia capacidad para entender las cosas.
2. Que los niños lleguen a ser capaces de resolver problemas de diferentes maneras.
3. Que los niños desarrollen el sentido del número.
4. Que los niños intercambien con seriedad puntos de vista con los demás.

Todo esto se logrará enseñando los algoritmos alternativos y comprendiendo el sentido que enlaza los pasos y los principios y razones que subyacen a los mismos, para Gómez (1998: 111) la tarea no es fácil ni rápida. Pero según Gutiérrez (2002: 128) tiene dos grandes ventajas: la primera se da cuando un alumno construye un algoritmo, no solamente se apropia de la lógica que lo sustenta, sino que descubre los alcances y limitaciones del mismo, la segunda cuando el niño trata de conocer la justificación de cada uno de los pasos del algoritmo, no solo proporciona confianza al estudiante, sino que evita los errores en que a menudo cae el alumno (a) cuando los aplica mecánicamente.

Por lo tanto se debe comenzar a pensar en otras alternativas, que tengan como principio el desarrollo del esquema mental del niño, que construyan sus propios conceptos para que entiendan lo que aprenden, este debe ser el fin de la enseñanza de la aritmética en la educación primaria.

Pero ahora cabe preguntarse: ¿Alguna vez se utilizaron otros modelos no tradicionales?, esto se contestará en la siguiente sección:

## 2.4 HACIA LOS ALGORITMOS ALTERNATIVOS

### 2.4.1 Historia de la multiplicación y la división a través de la humanidad.

Miguel de Guzmán (1993: 97) afirma que la historia proporciona una magnifica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de estos conceptos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado.

Piaget citado por Kamii (1995: 35) creía que si queremos comprender el conocimiento humano, tenemos que estudiar su origen y su evolución en la historia. Su razonamiento era que si el conocimiento de hoy se ha ido creando a lo largo de siglos mediante un proceso de construcción, podrían existir paralelismos entre la manera en que los niños construyen hoy el conocimiento y la manera en que la humanidad lo construyó en el pasado.

Kamii, (1995: 35) es de la opinión que conocer estos paralelismos entre la construcción de conceptos de números por parte del individuo y la construcción de los mismos conceptos por parte dela humanidad nos ayuda enormemente a comprender la naturaleza del conocimiento lógico- matemático y de los conceptos de número.

El propósito introducir la historia del surgimiento de la multiplicación y la división, es destacar lo inadecuado que es tratar de transmitir a los niños, de una forma ya preestablecida los resultados de siglos de construcción por parte de matemáticos adultos. Para Miguel de Guzmán (1993: 98) no se puede esperar que los alumnos descubran, en un par de semanas, lo que la humanidad elaboró a lo largo de varios siglos de trabajo intenso de mentes brillantes.

Sfard (2002: 31), es de la idea que este proceso nos puede hacer tomar conciencia del largo y penoso proceso que precede al nacimiento de un objeto matemático ya que puede ser la clave para entender algunas de las dificultades experimentadas por los estudiantes.

De aquí, apoyando a Miguel de Guzmán (1993: 98), un cierto conocimiento de la historia de la matemática debería formar parte indispensable del conocimiento de los profesores de cualquier nivel, ya sea primario, secundario o superior, no solo porque sirve como instrumento de enseñanza, sino primariamente porque la historia le proporciona una visión verdaderamente humana a la ciencia.

Boyer (1986: 22) sostiene que la aparición del pensamiento matemático en la humanidad fue un hecho prolongado y difícil, que nuestros antepasados tuvieron que superar. Su desarrollo se debió gracias al lenguaje articulado. El hombre necesitó de miles de años para extraer los conceptos abstractos de situaciones concretas repetidas, lo cual llevó, aunque en forma primitiva, al origen de la matemática.

Las afirmaciones que se hagan acerca de los orígenes de la matemática, ya sea de la aritmética o de la geometría, serán necesariamente arriesgadas y conjeturales, ya que éstas son más antiguas que el de la escritura. Y dentro de la aritmética la aparición de los números naturales, que es uno de los conceptos más antiguos de la matemática, se pierde entre la oscuridad de la antigüedad prehistórica.

Si bien ha sido difícil establecer la aparición de la matemática, los números naturales y la aritmética, mucho más misterioso es la aparición de las operaciones aritméticas. Sin embargo, según los estudios de Bell (1995: 41), la aritmética de aproximadamente 1650 a.c., era apta para la adición, sustracción, la multiplicación y la división, y se aplicaba a muchísimos problemas extraordinariamente sencillos.

Lo que si se puede establecer según Boyer (1986: 36), gracias al papiro de Ahmes, es que la operación fundamental en Egipto era la suma, y las operaciones de multiplicación y división se hacían en la época de Ahmes por sucesivas duplicaciones. Para Collete (1986: 44) toda la estructura de la aritmética egipcia se basa en dos principios operacionales: el primero favorece la capacidad para multiplicar y dividir por 2. Y el segundo para desarrollar los dos tercios de cualquier número, entero o fraccionario.

Un ejemplo de la multiplicación y división, utilizando este proceso son los siguientes:

| | |
|---|---|
| 24 x 37 | |
| 1 | 37 |
| 2 | 74 |
| 4 | 148 |
| 8 | 296 |
| 16 | 592 |

El objetivo era duplicar el multiplicando, comenzando desde la unidad hasta llegar a un número que no sobrepase al mismo, y al mismo tiempo con la unidad en la columna de la derecha se colocaba el multiplicador, que se va duplicando simultáneamente con el multiplicando. Luego la idea es sumar algunos números de la columna de la izquierda hasta conseguir el multiplicando, esto es, 24 = 8 + 16 y luego se toman los números respectivos de la columna de la derecha y la suma de ellos será la respuesta de dicha multiplicación; 296 + 592 = 888. Luego 24 x 37 = 888.

Para la división, el proceso es igual, la diferencia es que se duplica el divisor en la columna de la izquierda, y en la columna de la derecha se comienza con la unidad:

| | |
|---|---|
| 847 ÷33 | |
| 33 | 1 |
| 66 | 2 |
| 132 | 4 |
| 264 | 8 |
| 528 | 16 |

Luego se procede de la siguiente manera: ya que el doble de 528 excede a 847, el proceso de duplicación se detiene. Luego:

847 – 528 = 319 (528 corresponde a 16 de la otra columna)

319 – 264 = 55 (264 corresponde a 8 de la otra columna)

55 – 33 = 22 (33 corresponde a 1 de la otra columna)
entonces 33 cabe 16 + 8 + 1 = 25 veces en 847 y tiene como resto 22.

Según la experiencia de Collete (1986: 45) este principio de desdoblamiento utilizado en la multiplicación y división elimina la necesidad de aprender tablas de multiplicación (o construirlas).

Otra civilización que conocía la multiplicación y división era la Babilónica, para la multiplicación utilizaban tablas como las que tenemos actualmente. Y la división la ejecutaban mediante una simple multiplicación del dividendo por el divisor, usando para ello una tabla de inversos. Si se desea dividir 47 por 8, se busca primero el inverso de 8 que es 7,30; después se utiliza una tabla de multiplicación en la que s = 7,30 y se efectúa la siguiente operación: 40 x 7,30 + 7 x 7,30, resultados que se encontraban en una tabla elegida.

En la civilización Griega, no existen vestigios fuertes de cómo realizaban las operaciones aritméticas, pero tuvieron una fuerte influencia de Babilonia y Egipto. Los griegos distinguieron el estudio de las relaciones abstractas existentes entre los números del cálculo práctico. Según las investigaciones de Collete (1986: 74) y Boyer (1986: 92), el primero se conocía con el nombre de aritmética y los segundos recibían el nombre de logístas. Para Platón la logística era conveniente para el comerciante o para el hombre de guerra, que debía aprender el arte de los números o no sabrá como desplegar sus tropas. El filosofo, considerando las investigaciones de Boyer (1986: 124), debe ser aritmético “porque tiene que conseguir salir del mar del cambio para establecer contacto con el verdadero ser”.

A pesar de no existir una formulación clara de las operaciones básicas con números naturales, no puede hacerse a un lado el enorme aporte de los griegos a la matemática actual, prueba de ello lo constituye el libro “Los Elementos” de Euclídes, y para ser más exacto los Libros VII, VIII y IX que están dedicados a la teoría de números. Aquí Euclídes no usa las palabras “es múltiplo de” o “es factor o divisor de”, sino que las sustituye por “esta medido por” o “mide a” respectivamente.

Dentro del libro VII,  Euclides (?: 837) en la proposición 16,  dice: “si dos números multiplicados alternativamente dan ciertos números, estos números son iguales”,  esta proposición constituye la propiedad conmutativa de la multiplicación.

En China también se encuentran vestigios de la multiplicación y la división. En primer lugar, los chinos tenían dos sistemas de numeración, uno era multiplicativo y el otro utilizaba una forma de notación decimal. Un ejemplo de ello sería: el número 678 se escribía como el símbolo del 6 seguido del símbolo del 100, el símbolo del 7 seguido del símbolo del 10 y el símbolo del ocho.

Uno de los manuales más importantes en China es el Sunzi Suanjing, escrito en el primer milenio. Considerando las investigaciones de  Maza (1991: 89), este manual contiene el método Cheng Zhi Fa de multiplicación y el Chi Zhi Fa de la división. Los modelos que utilizaban tenían la siguiente posición:

| | |
|---|---|
| Multiplicación | División |
| Multiplicador | **Cociente** |
| **Producto** | Dividendo |
| Multiplicando | Divisor |

Un ejemplo de cómo multiplicaban los chinos es el siguiente:
Efectuar  23 x 47:
Primer paso: se coloca el 47 sobre el 23 dejando un amplio espacio entre ellos:

```
      4  7
  2   3
```

Segundo paso: se multiplican entre sí las cifras significativamente más altas de ambos números, de manera que el algoritmo, en realidad, se desarrolla de izquierda a derecha. El resultado parcial obtenido se coloca entre ambas filas:

```
      4  7
  8
  2   3
```

Tercer paso: se multiplica la cifra más alta del multiplicador por la siguiente del multiplicando colocando el resultado a la derecha del primer número encontrado, salvo si es superior a 10, en cuyo caso se sustituye el resultado anterior por la suma de los dos obtenidos hasta ahora:

4 7<br>
9 2<br>
2 3

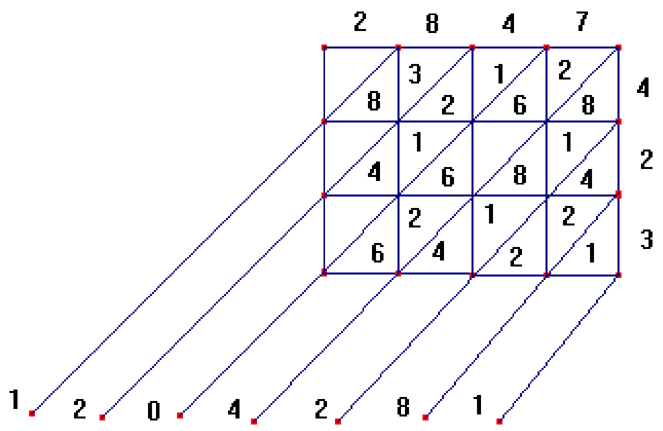
Cuarto paso: se multiplica ahora la cifra siguiente del multiplicador por la primera del multiplicando, procediendo de la misma manera que en el caso anterior, respetando el valor posicional parcial así obtenido:

7<br>
1 0 6<br>
2 3

quinto paso: se multiplican las cifras restantes del multiplicador y multiplicando, obteniéndose en la fila central el resultado final.

4 7<br>
1 0 8 1 $\longrightarrow$ producto.<br>
2 3

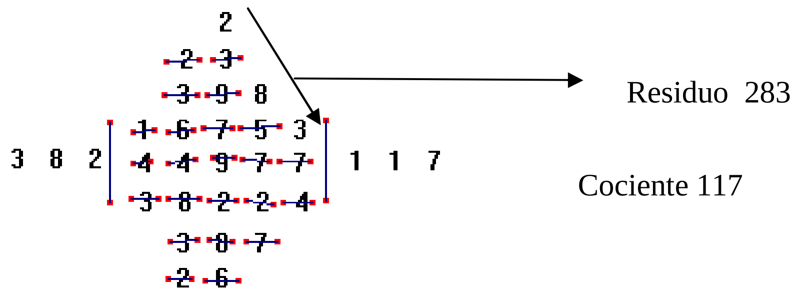
Por su parte, el método de los hindúes llamado de gelosias o celdillas o en cuadrilátero, es muy útil para evitar las llevadas de las multiplicaciones, pero si hay que efectuar las llevadas de la suma final: un ejemplo es: 2847 x 423



Aquí el multiplicando aparece en la parte superior de la gelosia, el multiplicador aparece en la parte derecha y los productos parciales aparecen en las celdas cuadradas, en donde la unidad va abajo y las decenas arriba. El producto final es la suma de las diagonales.

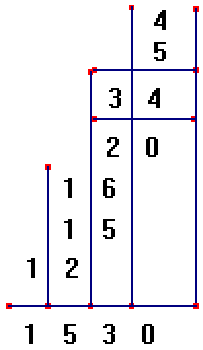
El algoritmo de las gelosias fue transmitido de la India a la China y a Arabia, de aquí hacia Italia durante los siglos XIV y XV, donde recibió el nombre de gelosia, debido al parecido que tenía con las persianas venecianas. La aritmética de Trevio en 1478, fue probablemente la primera obra que divulgó su utilización. Kamii (1995: 47) es de la opinión que aunque el procedimiento escrito de este método parece muy diferente del algoritmo empleado en la actualidad, la lógica de multiplicar cada digito del multiplicando por cada digito del multiplicador y de sumar todos los resultados al final es exactamente la misma.

Otro aporte significativo, según Smith y Ginsburg (1997: 52), de los hindúes fue el de la división larga o método de las galeras o de las “tachaduras” ya que cuando se utilizaban los números estos se tachaban . Una división entre 44977 por 382 sería:




El proceso es fácil de seguir, si tenemos en cuenta que los dígitos del sustraendo como 2674 o de una diferencia dada como 2957, no figuran todos ellos en la misma fila y que los sustraendos aparecen por debajo de la línea central y las diferencias por encima. Este método fue utilizado en los siglos XV y XVI en Europa.

En un manuscrito aparecido en Europa en 1424, aparece una forma peculiar de multiplicar, este modelo poco a poco fue dando origen a nuestro algoritmo actual.



Algo similar ocurrió con la división, el método de la caja de la división aparece en la obra de Leonardo de Pisa “Fibonacci” en el siglo XIII. Al final el método de la “caja” terminó por imponerse al de la galera. Nuestro método actual denominado “división larga”, comenzó a utilizarse en el siglo XV. Investigaciones de Smith y Ginsburg (1997: 53) aseguran que apareció impreso por primera vez en la aritmética de Calandris, publicada en Florencia (Italia) en 1491

Y por último, para Alem (1987: 20) la designación de los signos modernos, fue un gran paso hacia nuestro algoritmo actual, hay que destacar:

**Tabla 3**.

| | |
|---|---|
| • | Signo de multiplicación, usado por el filósofo y matemático Leibniz |
| : | Signo de división se debe a Leibniz |
| ÷ | Signo de división usada por Rhan, inglés 1659. |
| / | Inventado por los árabes. |

Invención de los signos de multiplicar y dividir

Al respecto con nuestro algoritmo actual, Kamii (1995: 47) opina que al transmitir de una forma prescrita el algoritmo actual a los niños, que es el resultado de siglos de reflexión de los adultos, privamos a los niños de la oportunidad de pensar por su cuenta. Los niños de hoy inventan procedimientos igual que nuestros antepasados y necesitan pasar por un proceso similar de construcción para llegar a ser capaces de comprender los algoritmos de los adultos.

## 2.5. TEORÍA DEL CAMBIO CONCEPTUAL

La idea que presupone la enseñanza – aprendizaje de modelos alternativos representa un choque en la concepción tradicional, esto sucede ya que los docentes de la escuela primaria desconocen estos modelos alternativos, a raíz de esto ellos sólo enseñan el algoritmo tradicional.

Los docentes y los estudiantes de primaria, poseen los distintos conocimientos: semántico, conceptual, esquemático, procedimental y estratégico ligados al algoritmo tradicional. Cambiar este tipo de conocimientos no resulta nada fácil, ya que las estrategias de ambos está encaminada a encontrar una respuesta y no comprender el hallazgo del mismo. El uso de algoritmos alternativos conlleva a tratar de comprender los algoritmos tradicionales, como históricamente se mostró, aunque parece ser un camino más largo; este es el mejor.

Sin embargo, esto lleva a cambiar de estrategias y una de ellas es la teoría del cambio conceptual, según Mayer (2002: 189): “el punto de vista de cambio conceptual es que el aprendizaje ocurre cuando nuestro modelo mental (o concepción inicial) es reemplazado por uno nuevo”.

Para este mismo autor, se destacan tres fases en esta teoría:

a) Reconocimiento de un error.
b) Construir un nuevo modelo
c) Usar un nuevo modelo.

Para la primera fase, enfrentarse a concepciones erróneas de los estudiantes es frustrante y desafiante, ya que ellos llegan con muchas ideas preconcebidas que son, de alguna manera, resistentes a la enseñanza tradicional.

Para la segunda fase, Mayer (2002: 190) considera que el estudiante aprende de dos formas, una por asimilación; es decir que encajan la nueva información en su conocimiento preexistente, desde un punto de vista tradicional y la otra por acomodación, aquí el alumno debe reemplazar o reorganizar sus conceptos centrales, ya que los actuales son inadecuados para permitirle comprender un fenómeno.

Posner (citado por Mayer, 2002: 200) postula tres características de una nueva concepción en el aprendizaje por acomodación:

a) Inteligible: el alumno debe comprender como funciona el nuevo modelo.
b) Plausible: el alumno debe ver cómo es de consistente la nueva concepción con otro conocimiento y explicativa de la información disponible.
c) Fructífera: el alumno debe de ser capaz de ampliar la concepción a nuevas áreas de investigación.

Para el tercer paso, el nuevo modelo debe tener sentido para el alumno y debe de ser útil para resolver problemas viejos y nuevos.

Para hacer posible esto, se utilizará la Enseñanza por Diagnóstico, que de acuerdo con Nuñez (2002: 169), es "identificar los conceptos y las concepciones erróneas que tienen los estudiantes; y también diseñar la forma de utilizar esas comprensiones erróneas para provocar conflicto y estimule discusiones que conduzca a los estudiantes a reorganizar su idea, incorporando sus interiorizaciones nuevas o corregidas"

En el caso de la multiplicación y la división se hará uso de los conocimientos previos, es decir del conocimiento de los estudiantes de la suma, resta y las tablas de multiplicación, que de acuerdo con Vygostky, esto es llamado "Zona de desarrollo próximo".

En la siguiente sección se rescatan los modelos alternativos a partir de toda esa experiencia acumulada durante siglos, de los procedimientos propios de algunas culturas y del ingenio de algunos personajes creativos.

## 2.6 MODELOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER UNA MULTIPLICACIÓN.

### 2.6.1 Modelo de sumas

Si la multiplicación es una suma reiterada, entonces se debe utilizar la suma para resolver multiplicaciones, esta puede ser utilizada tanto cuando el multiplicador tiene una, dos o más cifras, desde luego en algún momento se podrán ir omitiendo algunos pasos para efectuar aquellas multiplicaciones un poco extensas:

Son ejemplos:

1)

3 5 X 9

35
35
35
35
35
35
35
35
35

315

2)

3 5 X 9

35
35

70 → 2 veces 35
70 → 2 veces 35
70 → 2 veces 35
70 → 2 veces 35
35 → 1 veces 35

315 9

3)

3 6 x 4 8

36
+ 36

72 → 2 veces 36
+ 72

144 → 4 veces 36
+ 144

288 → 8 veces 36
+ 288

576 → 16 veces 36
+ 576

1152 → 32 veces 36
+ 576 → 16 veces 36

1728 → 48 veces 36

### 2.6.2 Modelo asociativo

Este modelo estimula mucho el cálculo mental, se debe comenzar a incentivar al estudiante a utilizar técnicas de cálculo mental y además a que estime, un elemento que no se estimula en las aulas de clase:

Ejemplos:

1) 15 x 6 = 15 x ( 2 x 3 ) = ( 15 x 2 ) x 3 = 30 x 3 = 90

2)

$$35 \times 18 = 35 \times (2 \times 9)$$
$$= (35 \times 2) \times 9$$
$$= 70 \times 9$$
$$= 630$$

### 2.6.3 Descomposición previa (propiedad distributiva)

Este modelo es muy importante si se desea que el niño comprenda todo el proceso de multiplicación, ya que aquí se da a conocer el valor posicional de cada número dentro del producto.

a) Del multiplicando $434 \times 6$

$$(400 + 30 + 4) \times 6$$

$$400 \times 6 + 30 \times 6 + 4 \times 6$$

$$2400 + 180 + 24$$

$$2604$$

b) Del multiplicador

$$
\begin{aligned}
434 \times 36 &= 434 \times (30 + 6) \\
&= 434 \times 30 + 434 \times 6 \\
&= 13020 + 2604 \\
&= 15624
\end{aligned}
$$

c) De ambos

$$
\begin{aligned}
36 \times 48 &= (30 + 6) \times (40 + 8) \\
&= 30 \times 40 + 30 \times 8 + 6 \times 40 + 6 \times 8 \\
&= 1200 + 240 + 240 + 48 \\
&= 1728
\end{aligned}
$$

### 2.6.4 Modelo extendido

Aquí se pone a prueba lo aprendido con el modelo distributivo, que es una aproximación al algoritmo tradicional, su ventaja estriba en que a cada dígito se le signa su verdadero valor posicional.

1)

$$
\begin{array}{r}
434 \times 6 \\
\hline
24 \\
180 \\
2400 \\
\hline
2604
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
345 \times 36 \\
\hline
30 \\
240 \\
1800 \\
150 \\
1200 \\
9000 \\
\hline
12420
\end{array}
$$

### 2.6.5 Modelo egipcio:

El método para realizar multiplicaciones entre los egipcios es la duplicación. Se realizaban en dos columnas: en la derecha se colocaba el multiplicando, que se duplicaba sucesivamente de acuerdo al número de veces marcado en la tabla de la izquierda.

Ejemplo:

25 x 20

| | |
|---|---|
| 1 | 25 |
| 2 | 50 |
| 4 | 100 |
| 8 | 200 |
| 16 | 400 |

El siguiente número de la izquierda se pasa de 20 por lo tanto hasta aquí llega esa secuencia.

Luego con los números de la izquierda se deben de tomar aquellos que al sumarlos den 20, estos serían: 16 + 4

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | → | 25 | |
| | 2 | | 50 | |
| 20 → | 4 | → | 100 | |
| | 8 | | 200 | |
| | 16 | → | 400 | |

Luego se suman los valores correspondientes de la columna de la derecha:

Esto es :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | 25 | |
| | 2 | | 50 | |
| 20 → | 4 | → | 100 | 100 |
| | 8 | | 200 | |
| | 16 | → | 400 | 400 |
| | | | | 500 |

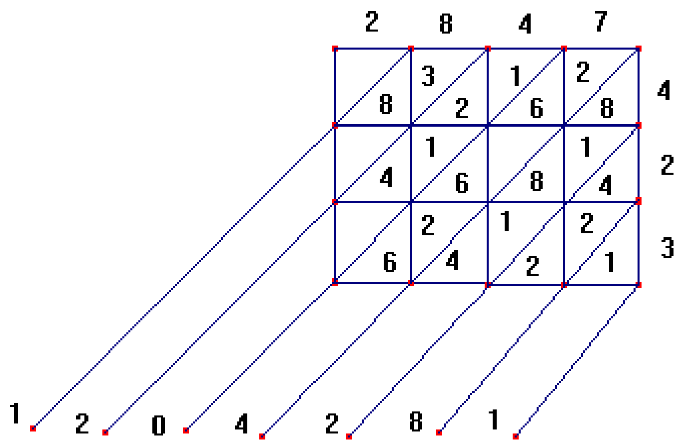
### 2.6.6 Método de las celosías.

Para Vernaud (2003: 158) "este método permite evitar ciertos fracasos en que caen los niños con el problema de lo retenido (lo que se lleva)". El método consiste en disponer la multiplicación sobre un cuadro cartesiano, y en escribir en cada casilla el resultado de la multiplicación de la cifra de la columna por la cifra del renglón.

Si el resultado tiene una o dos cifras: se escriben las cifras de las unidades en la parte diagonal derecha inferior y la cifra de las decenas en la parte diagonal izquierda superior.

Ejemplo :

2 8 4 7 x 4 2 3




La sumatoria en diagonal permite encontrar el resultado buscado.

La ventaja de este método según Zavrotsky (1971: 23) es que lo que se lleva en la fase de la multiplicación se escribe totalmente. Sólo lo que se lleva de la adición final se guarda mentalmente, además las ventajas que tiene este método sobre el convencional, son entre otras, el ahorro de tiempo, la seguridad, la atención que presta el alumno para efectuar el cálculo

Al respecto el mismo Vernaud (2003: 159) cita que este método fue experimentado con éxito por los investigadores del Instituto de Investigación para la Enseñanza de la Matemática (equipo de Guy Brousseau).

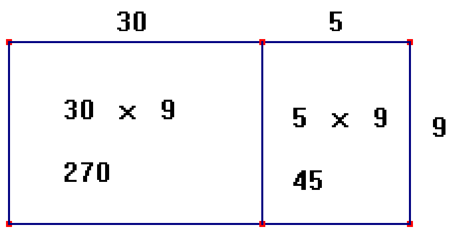
Chamorro (2003: 174) dice “que para evitar numerosos errores de los acarreos en la obtención de los resultados parciales, la utilización de los algoritmos como el de la celosía pueden ser excelentes puentes para la construcción, incluso pueden presentar grandes ventajas como algoritmos finales, adaptándose a las distintas singularidades de los aprendizajes de los alumnos.

**2.6.7 Método de los recortados**

Esta técnica consiste en  descomponer tanto el multiplicando y el multiplicador y se forma  un cuadro, en el cual se descomponen los números involucrados por medio de las propiedades de la multiplicación.

1) 35 x 9

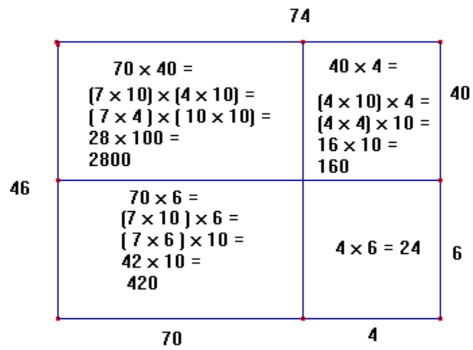
$$35 \times 9 = (30 + 5) \times 9$$




$$270 + 45 = 315$$

2) 74 x 46

74 = 70 + 4 , 46 = 40 + 6




Luego la respuesta es la suma parcial de cada cuadro:

74 x 46 = 2800 + 160 + 420 + 24 = 3404.

Según Chamorro (2003: 174) este proceso puede muy bien justificar los porqués de nuestro algoritmo, cuyas dificultades más frecuentes están siempre asociadas al tratamiento de los resultados parciales, bien por las llevadas dentro de un mismo resultado, bien por la colocación de los mismos.

### 2.6.8 Modelo ruso o campesina

Este modelo consiste en ir duplicando el multiplicador, mientras que el multiplicando se va reduciendo a la mitad. Cuando esa mitad es impar, se pone un uno a la izquierda.

Ejemplo 82 x 35:

**Tabla 4.** Modelo Ruso para multiplicar.

| | | |
|---|---|---|
| **0** | **82** | **35** |
| **1** | **41** | **70** |
| **0** | **20** | **140** |
| **0** | **10** | **280** |
| **1** | **5** | **560** |
| **0** | **2** | **1120** |
| **1** | **1** | **2240** |

El resultado se obtiene sumando “los dobles” del multiplicador que corresponden a los unos de la izquierda, esto es:

70 + 560 + 2240 = 2870.

### 2.6.9 Hacia nuestro algoritmo tradicional

Una vez que sabemos cuál es el trabajo de cada elemento del multiplicador y del multiplicando, estamos en proceso de llegar a nuestro método tradicional de multiplicación. A estas alturas se cree que no existirán tantos errores como los que se cometían al pasar de un solo al método tradicional.

Al efectuar 74 x 46 utilizando la propiedad distributiva sólo en el multiplicador se tiene:

$$74 \times 46 = \begin{array}{r} 74 \times (40 + 6) \\ \hline 444 \\ 2960 \\ \hline 3404 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74 \times 40 \\ \hline 2960 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74 \times 6 \\ \hline 444 \end{array}$$

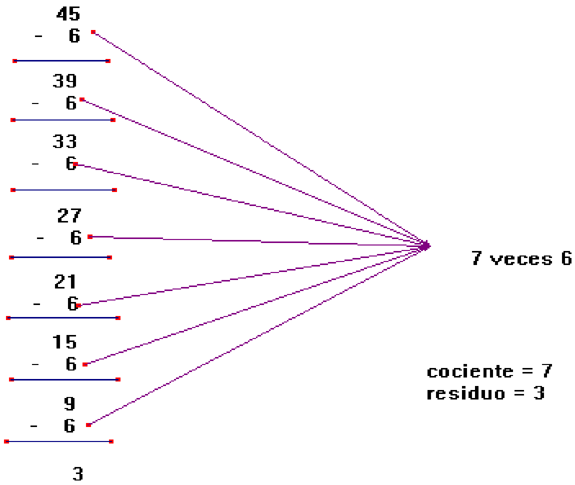
Es importante que los estudiantes por medio de los algunos modelos anteriores puedan comprobar que la respuesta obtenida es la correcta, con esto el ganará confianza y podrá desarrollar su autonomía.

## 2.7 MODELOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER UNA DIVISIÓN.

### 2.7.1 Modelo de las restas

Considerando la división como una resta reiterada, obtenemos el siguiente modelo de división:

45 ÷ 6




En este modelo, el cociente es la cantidad de veces que se ha restado el divisor y el residuo será la diferencia obtenida de ese proceso.

### 2.7.2 Modelo de sumas reiteradas:

Si se considera la división como la inversa de la multiplicación y a su vez la multiplicación es una suma reiterada, entonces la división se puede resolver como una suma reiterada:

45 ÷ 6

6 + 6 = 12

12 + 6 = 18

18 + 6 = 24

24 + 6 = 30

30 + 6 = 36

36 + 6 = 42

42 + 6 = 48 (se pasa)

Se han sumado 7 veces 6 = 42, entonces Cociente = 7 y el residuo es 45 – 42 = 3.

### 2.7.3 Modelo de las tablas

Como las sumas de un mismo número consigo mismo lo podemos expresar como multiplicación, entonces basta con escribir la tabla del divisor y averiguar cuál es el número que multiplicado con el divisor da cerca, sin pasarse, del dividendo:

45 ÷ 6

$6 \times 1 = 6$
$6 \times 2 = 12$
$6 \times 3 = 18$
$6 \times 4 = 24$
$6 \times 5 = 30$
$6 \times 6 = 36$
$6 \times 7 = 42$

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 42 \\ \hline 3 \end{array}$$

Cociente = 7
residuo = 3

Otra alternativa es la utilización de los múltiplos del diez, cien, cinco, etc.

2664 ÷ 21

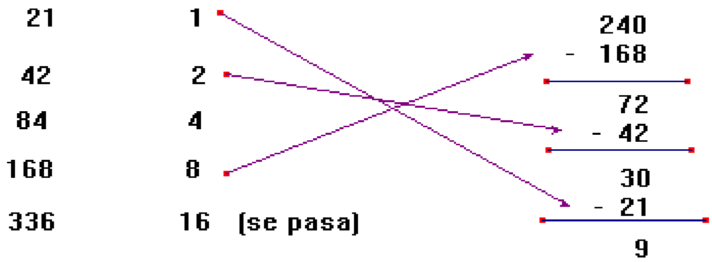
| múltiplos de 100 | múltiplos de 10 | múltiplos de 5 |
|---|---|---|
| 21 × 100 = 2100 | 21 × 10 = 210 | 21 × 5 = 105 |
| 21 × 200 = 4200 | 21 × 20 = 420 | 21 × 10 = 21 |
| 21 × 300 = 6300 | 21 × 30 = 630 | |

$$\begin{array}{rl} 2664 & \\ -\ 2100 & \longrightarrow 100 \text{ veces} \\ \hline 564 & \\ -\ 420 & \longrightarrow 20 \text{ veces} \\ \hline 144 & \\ -\ 105 & \longrightarrow 5 \text{ veces} \\ \hline 39 & \\ -\ 21 & \longrightarrow 1 \text{ vez} \\ \hline 18 & \quad 126 \text{ veces} \end{array}$$

Cociente = 126
residuo = 18

## 2.7.4 Modelo Egipcio

El método para realizar multiplicaciones entre los egipcios es la duplicación. Se realizaban para ello dos columnas: en la izquierda se colocaban el divisor y en la derecha la cantidad de veces que se estaba sumando el mismo: se busca un número del lado izquierdo cercano al dividendo, sin pasarse, se le resta esa cantidad y al resto se vuelve a buscar un número de la columna izquierda  y se le resta esa cantidad. El proceso termina cuando el resto es menor que el divisor. Luego el cociente será la suma de los números correspondientes de la columna de la izquierda en la columna de la derecha, así: efectuar 240 ÷ 21




8 + 2 + 1 = 11

Cociente = 11
Residuo = 9

## 2.7.5 Modelo distributivo

Este método consiste en descomponer el dividendo, y aplicar la propiedad distributiva con el divisor:

548 ÷ 35

( 500 + 40 + 8 ) ÷ 35

( 500 ÷ 35 ) + ( 40 ÷ 35 ) + ( 8 ÷ 35 )

35 × 1 = 35

35 × 2 = 70

35 × 3 = 105

35 × 4 = 140

35 × 5 = 175

35 × 10 = 350

500 ÷ 35      40 ÷ 35      15 + 8 = 23

10 + 40 = 50

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 veces | 500 - 350 | | |
| | 150 | | 50 |
| 4 veces | - 140 | 1 vez | - 35 |
| 14 veces | 10 | | 15 |

15 veces

**Cociente = 15**
**residuo = 23**

### 2.7.6 Hacia nuestro algoritmo tradicional:

Al desarrollar 74 ÷ 3 se puede proceder de la siguiente manera:

Descomponer 74 = 70 + 4

```
 70 + 4        | 3
               ----------------
-60              20  +  4  = 24
----
10 + 4 = 14
       - 12
       ----
          2
```

Cuando se ha tenido suficiente práctica en los fundamentos de este algoritmo, se puede simplificar. La clave de este paso es el asegurarnos de que el alumno haya entendido suficientemente el uso de la propiedad distributiva.

De toda esta información se utilizó dos modelos para la multiplicación: el de sumas y la propiedad distributiva y para la división se utilizaron 4 modelos: el de la suma, el de la resta, el de las tablas y la propiedad distributiva.

# CAPITULO III
# METODOLOGÍA

## MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS

En este capítulo se describe la metodología utilizada para la investigación; se especifica el tipo de investigación, los grupos de la prueba piloto, los instrumentos utilizados para recolectar la información, los indicadores que se utilizaron para diseñarlos, así como el tipo de análisis aplicado.

### TIPO DE INVESTIGACION

El tipo de estudio que se realizó es exploratorio cualitativo, de la situación de aprendizaje de los estudiantes de primer curso del Instituto José Trinidad Reyes; basado en el desempeño de los estudiantes en la realización de multiplicaciones y divisiones con números naturales utilizando métodos alternativos. Para ello se observó el trabajo de tres grupos de estudiantes en la utilización de estos métodos para resolver multiplicaciones y divisiones con números naturales.

### PARTICIPANTES EN EL ESTUDIO

El trabajo se realizó con tres grupos de estudiantes de las secciones 6 , 10 y 27 de primer curso de ciclo común del Instituto "José Trinidad Reyes", a los que se les aplicó una prueba diagnóstica sobre el dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales. Además, se les aplicó otra prueba diagnóstica para comprobar su conocimiento de los métodos alternativos, luego se desarrolló una serie de actividades con el fin de validar el modelo de enseñanza sustentado en el uso de métodos alternativos, para llegar a resolver correctamente ejercicios de multiplicación y división. El experimento se llevó a cabo desde el 28 de febrero al 22 de abril del 2005, culminando con una prueba final que se aplicó el día 25 de abril.

El grupo que participó en el estudio estuvo conformado al inicio por 115 estudiantes y luego se agregaron 6 más para hacer 121 estudiantes que resolvieron las guías de trabajo, todos ellos del ciclo común del Instituto Departamental José Trinidad Reyes. Con ellos se pretendía ver los conocimientos que poseían para resolver multiplicaciones y divisiones y al mismo tiempo observar su adaptabilidad con otros nuevos modelos para realizar esas dos operaciones.

**INDICADORES QUE GUIARON EL ESTUDIO**

Los indicadores que guiaron la experiencia fueron los siguientes:

1. Dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales de la muestra institucional y del grupo de experimentación.
2. Relación de la suma con la multiplicación.
3. Conocimiento de la relación de una multiplicación con una división.
4. Relación de la división con la resta.
5. Relación de la división con la suma.
6. Relación de la división con la multiplicación.
7. Modelos mejor comprendidos por los estudiantes.
8. Resolución de multiplicaciones y divisiones utilizando los métodos alternativos.

**INSTRUMENTOS UTILIZADOS**

Se utilizó la enseñanza por diagnóstico, para identificar los conceptos y las concepciones erróneas, de acuerdo a estos se planeo la intervención, en este caso al alumno se le presentó el modelo a utilizar, guías de trabajo, esta contenía preguntas orientadoras que el alumno debió de contestar luego de que el grupo debatiera cada modelo, utilizando para ello la lluvia de ideas. Y por último el alumno resolvía individualmente los ejercicios propuestos para comprobar lo discutido anteriormente.

Se utilizaron 4 instrumentos:

El instrumento N. 1, consistió en la prueba diagnóstica que se ha venido aplicando desde hace 7 años a los estudiantes de primer curso para establecer el dominio que poseen de los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones básicas con números naturales y con énfasis en las operaciones que se pretendían estudiar.

Los problemas seleccionados en este instrumento involucraron ejercicios que permitieron conocer el dominio que ellos poseían de los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones básicas con números naturales, incluyendo desde luego a la multiplicación y división, que son las operaciones a estudiar. Se deseaba determinar su dominio y la resolución correcta de los ejercicios propuestos, así como las dificultades encontradas.

Este instrumento contiene 8 ejercicios y para calificarlo se consideró el valor de 12.5% cada uno, luego se estableció el dominio del grupo con respecto a los criterios que se muestran en la siguiente tabla:

**Tabla n. 5**

| Indicador en porcentaje | Observación |
|---|---|
| 0 – 59 | No tienen dominio |
| 60- 80 | Dominio bueno |
| 81-90 | Dominio muy bueno |
| 91-100 | Dominio excelente |

Criterios para establecer el grado de dominio de las cuatro operaciones básicas.

Además se utilizó la misma tabla anterior para establecer el dominio de las operaciones multiplicación y división. Con respecto a esto, los ejercicios de la multiplicación fueron:

1) 342 x 28 2) 1, 302 x 301

El primero posee dos cifras en el multiplicador, el multiplicando tiene tres cifras, el segundo posee la cifra cero en las decenas tanto en el multiplicando como en el multiplicador, con esto se pretende establecer si el estudiante dominaba el algoritmo de la multiplicación independientemente de las cifras del multiplicando como del multiplicador.

Para la división, se presentaron los siguientes ejercicios:

1) 8493 ÷5 2) 34, 381 ÷ 54

En este caso el primer divisor posee una cifra y en el segundo ejercicio el divisor posee dos cifras. Esto con el fin de establecer el dominio del algoritmo por parte de los estudiantes independientemente de las cifras del divisor.

El instrumento N.2 fueron guías diagnósticas que se aplicaron para establecer el conocimiento que poseían los estudiantes, estas guías están relacionadas con los métodos alternativos de la multiplicación y división así como la relación existente entre las operaciones básicas, como también la comprobación de los resultados.

Un ejemplo es el siguiente:

Dada la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 345 \times 726 \\ \hline 2070 \\ 690\phantom{0} \\ 2415\phantom{00} \\ \hline 250470 \end{array}$$

¿Cómo comprobaría que la respuesta dada es la correcta?

En este ejercicio se pretendía establecer la relación de la multiplicación con la división o con la suma. Las posibles respuestas son:

Establecer las divisiones siguientes:

a) 250470 $\div$ 726, si al realizar la división se obtiene: Cociente = 345 y residuo = 0.

b) 250470 $\div$ 345, si al realizar la división se obtiene: Cociente = 726 y residuo = 0.

Con relación a la suma: sumar 345 veces 726 ó sumar 726 veces 345.

El instrumento N. 3, consistió en guías de trabajo que se aplicaron para orientar al estudiante a multiplicar y dividir por métodos alternativos. Para ello los estudiantes trabajaron en guías de trabajo, estas contenían el modelo a utilizar y su comprensión fue guiada por preguntas orientadoras, una vez comprendido el modelo, el estudiante resolvió ejercicios de manera individual. De aquí se estudió sus respuestas para encontrar el nivel de comprensión del modelo. Que es uno de los objetivos de este trabajo.

El instrumento N. 2 y N. 3 se elaboraron considerando los indicadores del estudio, las preguntas de investigación y los objetivos de este trabajo.

**MODELOS UTILIZADOS**

**MODELO DE LA MULTIPLICACIÓN.**

Se utilizaron los siguientes modelos alternativos para multiplicar y dividir:

1) Adición reiterada:

**OBJETIVO MATEMÁTICO:**
Desarrollar la multiplicación utilizando el concepto de adición reiterada.

**OBJETIVO DIDÁCTICO**
La situación presentada ilustra dos nociones: una como herramienta y otro como objeto. La herramienta a utilizar es el concepto de suma y el objeto a desarrollar es el concepto de multiplicación.

2) Cálculo de productos parciales utilizando la propiedad distributiva.

**OBJETIVO MATEMATICO**

Desarrollar la multiplicación utilizando las propiedades de la multiplicación y el concepto de sumas parciales.

**OBJETIVO DIDACTICO**

La situación presentada ilustra tres nociones: dos como herramienta y otro como objeto. La herramienta a utilizar es el concepto de suma y la utilización de las propiedades de la multiplicación y el objeto a desarrollar es el concepto de multiplicación.

**MODELO DE LA DIVISIÓN.**

Los algoritmos propuestos son:

1.) Resta reiterada

**OBJETIVO MATEMÁTICO**

Desarrollar la división utilizando la operación resta.

**OBJETIVO DIDACTICO**

La situación presentada ilustra dos nociones: una como herramienta y otro como objeto. La herramienta a utilizar es operación resta y el objeto a desarrollar es el concepto de división.

2) Suma reiterada

**OBJETIVO MATEMATICO**

Desarrollar la división utilizando la operación suma.

**OBJETIVO DIDACTICO**

La situación presentada ilustra dos nociones: una como herramienta y otro como objeto. La herramienta a utilizar es operación suma y el objeto a desarrollar es el concepto de división.

3) Modelo de las tablas

**OBJETIVO MATEMÁTICO**

Desarrollar la división utilizando la multiplicación.

**OBJETIVO DIDÁCTICO**

La situación presentada ilustra dos nociones: una como herramienta y otro como objeto. La herramienta a utilizar son las tablas de multiplicación y el objeto a desarrollar es el concepto de división.

4) Cálculo utilizando la propiedad distributiva.

**OBJETIVO MATEMATICO**

Desarrollar la división utilizando la descomposición del dividendo y la propiedad distributiva.

**OBJETIVO DIDACTICO**

La situación presentada ilustra tres nociones: dos como herramienta y otro como objeto. La herramienta a utilizar es la descomposición del dividendo y la propiedad distributiva y el objeto a desarrollar es el concepto de división.

**DOMINIO DE LOS MODELOS ALTERNATIVOS**

Para analizar el grado de dominio de los modelos alternativos, se estableció los siguientes criterios:

**Tabla n.º 6**

| Indicador en porcentaje | Observación |
|---|---|
| 0 – 50 | No tienen dominio |
| 51- 70 | Dominio bueno |
| 71-90 | Dominio muy bueno |
| 91-100 | Dominio excelente |

Criterios para establecer el grado de dominio de los métodos alternativos.

Cada guía de trabajo contenía el modelo que tenían que comprender y aplicar a los ejercicios propuestos:

Un ejemplo es el siguiente:

Utilizando el siguiente modelo en la división:

1. Efectúe la siguiente división $35 \div 6$ y encuentre el cociente y el residuo.

Modelo a utilizar:

Si al 35 le restas varias veces el 6, hasta cuando ya no se pueda, observa y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relación existe entre el cociente y la cantidad de veces que se restó el 6?

b) ¿Qué relación existe entre lo que sobró en la resta con el residuo de la división?

c) ¿Se puede efectuar una división solamente restando?

Analizando lo anterior, efectúe los siguientes ejercicios:

$78 \div 9$ $345 \div 76$

$845 \div 123$ $1234 \div 212$

Se utilizo la estrategia lluvia de ideas para que los estudiantes pudieran contestar las preguntas guía y que lograran comprender el modelo. Luego en la semana de cierre se realizó una retroalimentación para prepararse para el examen, que es el instrumento N. 4.

El instrumento N. 4 fue una prueba que tuvo que realizarse como un examen parcial en el Instituto, ya que la evaluación de esos cursos correspondía a la nota de su primer parcial, la experiencia comenzó el 28 de febrero y terminó el 25 de abril.

De la prueba final, se pretendía lo siguiente:

| N. de pregunta | Tipo de pregunta | Propósito |
|---|---|---|
| 6 a y 6b | Trabajo práctico | Resolver en forma correcta las dos multiplicaciones, si es posible utilizando los métodos alternativos |
| 7 a y 7b | Trabajo práctico | Resolver en forma correcta las dos divisiones, si es posible utilizando los métodos alternativos |

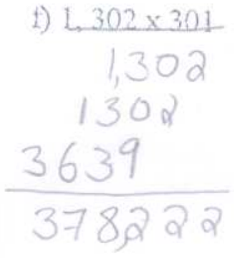
**PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS**

Se hizo un análisis de tipo cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes. Para ello se centró la atención en los siguientes aspectos del trabajo de los estudiantes: comprensión del modelo, preferencia de los modelos y la utilización de los modelos alternativos en situaciones problemáticas.

Para cada guía diagnóstica, guía de trabajo y prueba final se elaboró una tabla con su respectivo porcentaje, donde se presenta el número de estudiantes que contestaron bien y sus dificultades. Se insertaron en algunos casos copias manuscritas para comprender mejor la lectura del análisis.

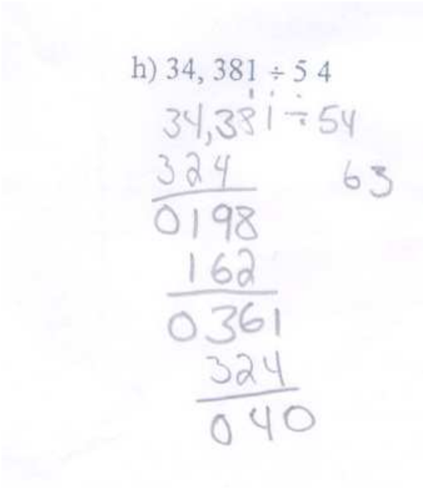
Un ejemplo es:

En la primera prueba diagnóstica, los estudiantes presentaron muchas dificultades para multiplicar y dividir, en la multiplicación una de ellas es:




Aquí el estudiante considera la multiplicación del cero como la del uno, llevando inevitablemente a que la respuesta este incorrecta, aunque hay que considerar el hecho de haber colocado bien las multiplicaciones parciales de acuerdo al valor posicional de las cifras del multiplicados. Esta dificultad no es aislada, este patrón se presenta sistemáticamente en muchos estudiantes año tras año.

Con respecto a la división, veamos el siguiente caso:




Este estudiante realizó correctamente las multiplicaciones parciales y en los primeros dos casos restó correctamente, sin embargo en la tercera resta parcial, su diferencia está incorrecta, pero el mayor error lo comete al no considerar colocar el número correspondiente en el cociente a la tercera multiplicación parcial. Este problema también es muy frecuente en el estudiante, ya que este no logra estimar si su respuesta es correcta ni tampoco comprueba la misma par verificar que su respuesta es la correcta. Y esto tiene mucho que ver con el algoritmo en sí, ya que el estudiante no logra visualizar si el 6 será una centena, una decena o unidades.

# CAPITULO IV

# ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

## 4. RESULTADOS OBTENIDOS

### 4.1 Análisis de la guía Diagnóstica N. 1

Para el primer indicador**, Dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales de la muestra institucional y del grupo de experimentación**, se aplicó la prueba diagnóstica del anexo1, obteniéndose los siguientes resultados:

**Tabla nº 7**

| Aciertos | |
|---|---|
| N. de alumnos | % |
| 199 | 49 |

Porcentaje de aprobación en la prueba diagnóstica institucional

Los datos de la tabla muestran que solo el 49% de los estudiantes evaluados obtuvieron más de 60% en la prueba diagnóstica, concluyéndose que la mayoría no tiene un dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales.

En lo que concierne a las secciones 6, 10 y 27, que forman el grupo experimental, se les aplicó la misma prueba diagnóstica y se obtuvieron los siguientes resultados:

**Tabla nº 8**.

| Sección | Aciertos | |
|---|---|---|
| | N. de estudiantes | % |
| Sección 6 | 12 | 32 |
| Sección 10 | 16 | 42 |
| Sección 27 | 11 | 28 |
| Total | 39 | 34 |

Porcentaje de aprobación en los cursos de la experiencia en las cuatro operaciones básicas.

De la tabla anterior, se puede observar, que sólo 39 aprobaron para un total de 34%. Por lo tanto la mayoría del grupo de experimentación no tiene un dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales.

Con respecto a la multiplicación y la división, la prueba contenía los siguientes ejercicios**:**

Pregunta 5) 342 x 28

pregunta 6) 1, 302 x 301

Pregunta 7) 8493 ÷5

Pregunta 8) 34, 381 ÷ 54

En la prueba diagnóstica aplicada a la muestra institucional, se obtuvieron los siguientes resultados:

**Tabla nº 9**

| N. de Pregunta | Aciertos | |
|---|---|---|
| | N. de estudiantes | % |
| Pregunta 5 | 230 | 57% |
| Pregunta 6 | 187 | 46% |
| Pregunta 7 | 273 | 68% |
| Pregunta 8 | 135 | 32% |

Porcentaje de aciertos de la multiplicación y división en el grupo Institucional

Se observa que los estudiantes no poseen un dominio de la multiplicación, y las dificultades son mayores cuando en el multiplicador el lugar de las decenas es un cero. Con respecto a la división con una cifra en el divisor tienen un dominio bueno con 68%, sin embargo con dos cifras en el divisor se obtuvo el 32% que no es bueno de acuerdo a la tabla 5.

Con respecto a las secciones de la experiencia se tienen los siguientes datos:

**Tabla nº 10**

| Sección | Aciertos | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pregunta 5 | | Pregunta 6 | | Pregunta 8 | | Pregunta 9 | |
| | N. estudiantes | % | N. estudiantes | % | N. estudiantes | % | N. estudiantes | % |
| Sección 6 | 19 | 50 | 15 | 39 | 29 | 76 | 13 | 34 |
| Sección 10 | 24 | 63 | 22 | 58 | 27 | 71 | 15 | 39 |
| Sección 27 | 22 | 56 | 12 | 31 | 28 | 72 | 6 | 15 |
| Total | 65 | 57 | 49 | 43 | 84 | 73 | 34 | 30 |

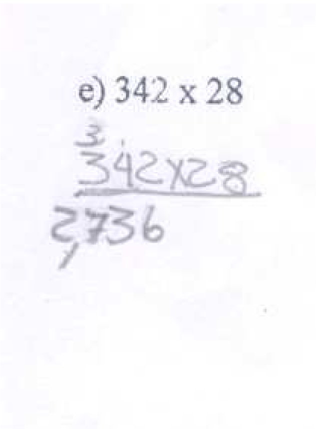
Porcentaje por sección de aciertos de las multiplicaciones y divisiones en la prueba diagnóstica de los grupos de la experimentación.

Se puede notar que en la primera multiplicación, un 57% la resolvieron correctamente, sin embargo la segunda multiplicación obtuvieron un rendimiento menor ( 43%). Igual ocurrió con la división, contestaron correctamente la división con una cifra en el divisor un 73%, pero obtuvieron un rendimiento menor con dos cifras en el divisor (30%).

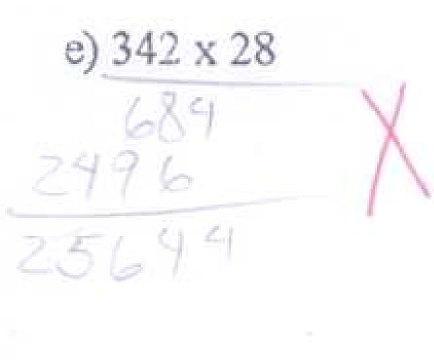
Entre las dificultades encontradas se tienen las siguientes:

Para la multiplicación:

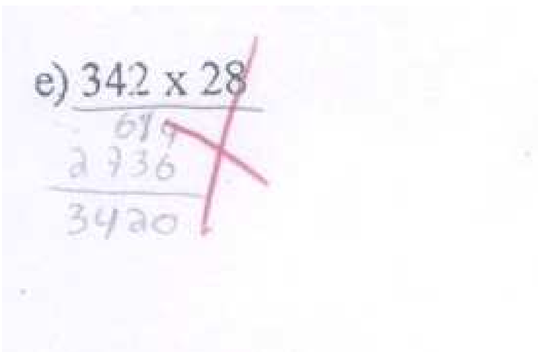
Este estudiante solamente multiplicó el 8, aunque lo hizo correctamente se olvidó de multiplicar el 2, que desde luego llevó a una respuesta equivocada.



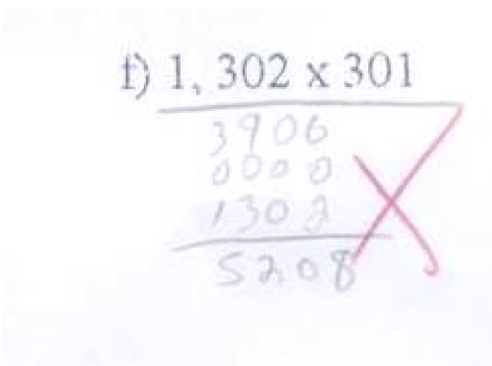
Este estudiante multiplicó primero el 2 y luego el 8, cometiendo un error fundamental de procedimiento. Nótese que corrió hacia la izquierda la multiplicación del 8, dejando el espacio del valor posicional de las decenas, que es otro problema encontrado. Él confundió las unidades y las decenas del multiplicador.



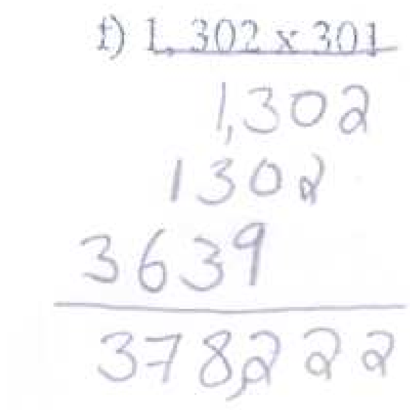

Igual que el ejemplo anterior, pero aquí no se consideró el valor posicional de ninguno de los dos dígitos del multiplicador.

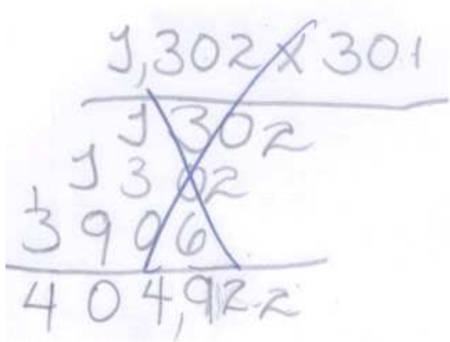



Aquí el problema es que no consideró el valor posicional de las centenas, observe que tampoco consideró el valor posicional del cero, de allí que su respuesta estuviera errónea.

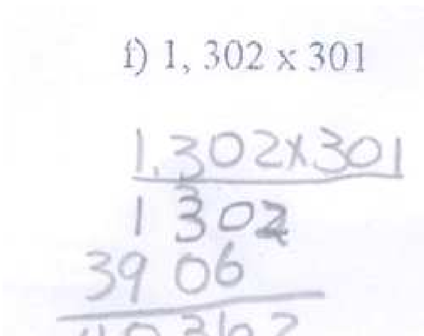


Estos estudiantes consideraron el valor posicional de los dígitos del multiplicador, sin embargo al multiplicar por cero lo hicieron de la misma forma que al multiplicar el uno. Considerando este un error conceptual de las tablas de multiplicación. Además el primero realizó mal la multiplicación del 3 del multiplicador, las tablas de multiplicación  es otro error continuo que cometen los estudiantes.



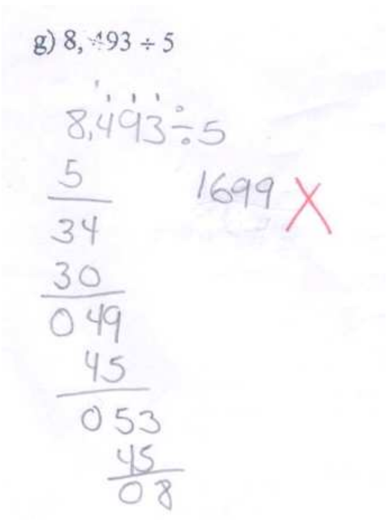

Luego, este estudiante no consideró el valor posicional del cero, que es un error muy frecuente que cometen los estudiantes.



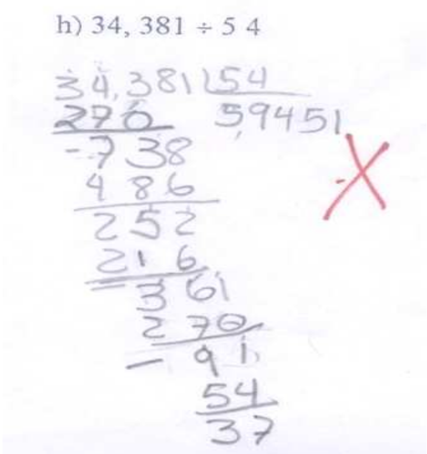

Como puede notarse, uno de los principales  problemas es el dominio el valor posicional, otro es el procedimiento, las tablas de la multiplicación, estos errores han sido frecuentes durante los años en la que se ha aplicado esta prueba diagnóstica.

Veamos ahora para la división:

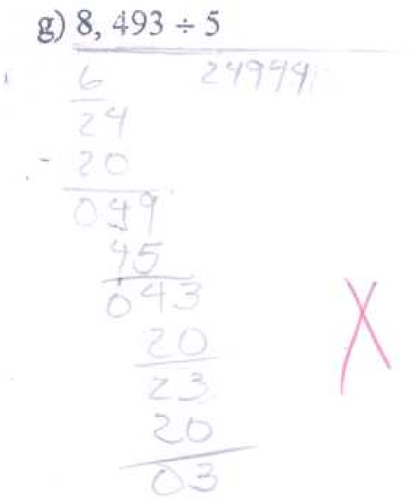
En esta división, el estudiante realizó la resta 49 – 45 = 5, de una forma errónea, sin embargo él no se percata que según la definición del algoritmo de la división, no es posible que el residuo sea igual o mayor que el divisor.



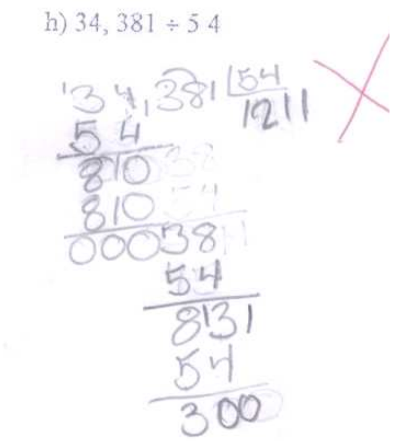

Igual error cometió este estudiante, al restar 343 – 270 = 73, no se percató que el residuo es mayor que el divisor



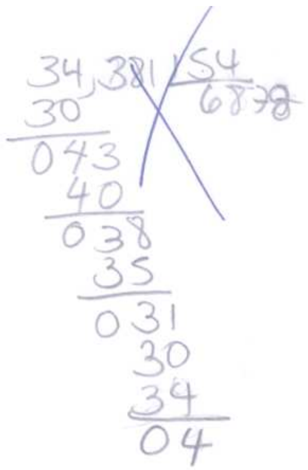
Este estudiante, al multiplicar el 2 del cociente con el 5 del divisor le resulta 6 y más adelante luego “baja” dos veces el 3.




En este caso, el estudiante dice “ 37 entre 54 es a 1” , luego en vez de restar suma y luego dice “ 810 entre 54 es a 2”  esta multiplicación de 54 x 2 le da 810 y la resta le queda 0, baja el 3 y el 8 al mismo tiempo y dice : “ 38 entre 54 a 1” para luego sumar.



En este caso, el estudiante solamente considera el digito 5 del 54 como divisor, dice: “34 entre 5 da 6” y luego multiplica 6 x 5 = 30 y se lo resta al 34. Ignora completamente las cifra de las unidades del divisor.



Y todo el proceso lo hace de la misma forma.

Observando lo anterior,  los principales problemas en la división son:

1) Desconocimiento completo de la definición de la división, esto con respecto al residuo ya que este tienen que ser menor que el divisor.

2) Dominio de las tablas de la multiplicación.

3) Errores procedimentales

4) Otros simplemente no la hicieron.

Otros datos interesantes son:

Solamente el 25% de los estudiantes contestaron  correctamente las dos multiplicaciones, y el 28% contestaron las dos divisiones de forma correcta. Esto pone en énfasis  la falta de dominio de estas dos operaciones.

Según Resnick y Ford, (1998: 108) , “estos patrones de pensamientos – estrategias de cálculo– que desarrollan los alumnos de las matemáticas elementales están muy individualizados, y muchas veces no siguen los modelos ortodoxos de los libros de texto y del aula” . Esto se puede observar en la cantidad de desviaciones de los algoritmos que se enseñan en el aula.

Tanto en la multiplicación y en la división se presentaron una variedad de soluciones poco ortodoxas.

Pero todo esto viene a redundar en el valor posicional. Kamii (1995: 49) sostiene que: "los algoritmos "malenseñan" el valor posicional, ya que el mayor defecto que esto produce en la mente del niño, es que considera todos los números como unidades, desconociendo el valor posicional de ellos, además los algoritmos trabajan individualmente con todos los dígitos involucrados en los números en la cual se efectúa la operación, esto produce que el niño no vea un número como un ente único sino como uno formado solo por dígitos".

En la multiplicación el enfoque unitario se vuelve más crítico, ya que al hacer una multiplicación como: 343 x 2, el alumno al multiplicar el 2 por el 4, considera que multiplica unidad por unidad y dice 8, desconociendo el valor posicional del 4 como decena, ya que la respuesta correcta en este caso es 80.

Esta situación lleva a pensar que existe una falta de comprensión fundamental de los conceptos y procedimientos. Que desde luego son consecuencia de todo lo anterior.

Considerando lo anterior, de acuerdo con el indicador **Dominio de las cuatro operaciones básicas con números naturales de los estudiantes de la muestra institucional y del grupo de experimentación,** se puede concluir que la mayoría de estudiantes no poseen dominio de las cuatro operaciones básicas.

## 4.2. RESULTADOS OBTENIDOS DE LAS GUÍAS DIAGNÓSTICAS PARA INDAGAR EL CONOCIMIENTO SOBRE MODELOS ALTERNATIVOS.

Para el segundo indicador: **Relación de la suma con la multiplicación**, se aplicó a los grupos de la experimentación las guías diagnósticas del anexo 2:

**1. Guía diagnóstica nº 1:**

```
                 3  4  5  x  7  2  6
        ______________________________

            2  0  7   0
            6  9  0
   2  4   1  5
   ______________________________

  2  5  0  4  7  0
```

2) En la multiplicación anterior, como comprobaría que la respuesta dada es la correcta

Los resultados que se obtuvieron son los siguientes:

**Tabla n. 11.**

| Respuesta de los estudiantes | Cantidad de estudiantes por sección | | |
|---|---|---|---|
| | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 |
| No lo sabe | 10 | 25 | 6 |
| Hacer sumas sucesivas | 0 | 0 | 0 |

Cantidad de estudiantes que contestaron la pregunta dada.

Es importante resaltar que los restantes estudiantes tuvieron la noción de la división, 2 de ellos si pudieron establecer cuál sería el dividendo y el divisor, pero los demás solo propiciaron como una solución la división. Esto es importante considerando, que ellos no dominan la operación división. En el caso de probar la multiplicación su pensamiento está ligado fuertemente a la operación división más que a la suma

**2. Guía diagnóstica nº 2**:

3 4 5 x 10          3 4 5 x 1 0 0

3 4 5 0          3 4 5 0 0

2) En las multiplicaciones anteriores, como comprobaría que la respuesta dada es la correcta
Los resultados que se obtuvieron son los siguientes:

**Tabla n. 12.**

| Respuesta de los estudiantes | Cantidad de estudiantes por sección | | |
|---|---|---|---|
| | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 |
| No lo sabe | 10 | 26 | 14 |
| Hacer sumas sucesivas | 0 | 0 | 0 |

Cantidad de estudiantes que contestaron la pregunta dada.

A pesar que esta es una regla muy importante, ellos no pueden comprobarla, 50 estudiantes contestaron que no lo sabían y los demás tienen la idea de hacerlo utilizando la división. Tampoco tienen la noción de sumas sucesivas.

**3. Guía diagnóstica nº 3:**

3 4 5 x 3 0 4

1 3 8 0
1 0 3 5
1 0 4 8 8 0

2) En las multiplicaciones anteriores, como comprobaría que la respuesta dada es la correcta

Los resultados que se obtuvieron son los siguientes:

**Tabla n. 13.**

| Respuesta de los estudiantes | Cantidad de estudiantes por sección | | |
|---|---|---|---|
| | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 |
| No lo sabe | 13 | 27 | 10 |
| Hacer sumas sucesivas | 0 | 0 | 0 |

Cantidad de estudiantes que contestaron la pregunta dada.

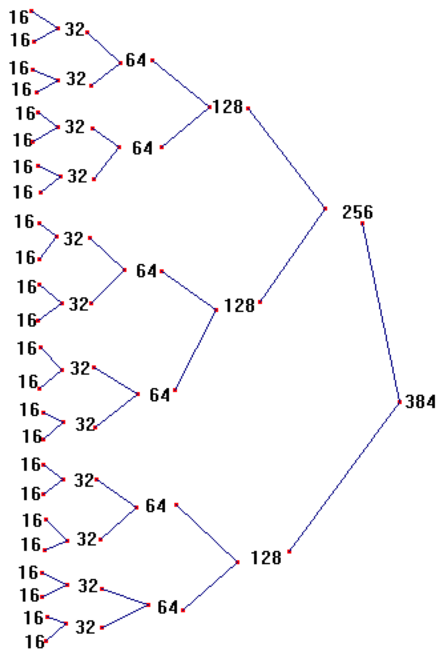
Al igual que las anteriores, el desconocimiento de los estudiantes es alto, la relación de la multiplicación con la división es significativa, a pesar que tienen dificultades para dividir.

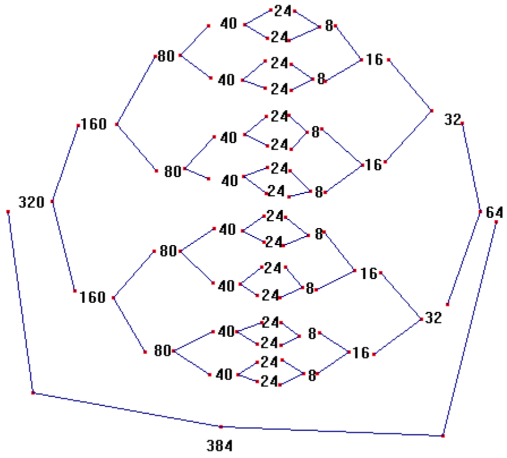
Todo esto se puede resumir en que los estudiantes no poseen conceptualmente una relación de la suma con la multiplicación, que es uno de los problemas causados por la enseñanza del algoritmo tradicional de la multiplicación.

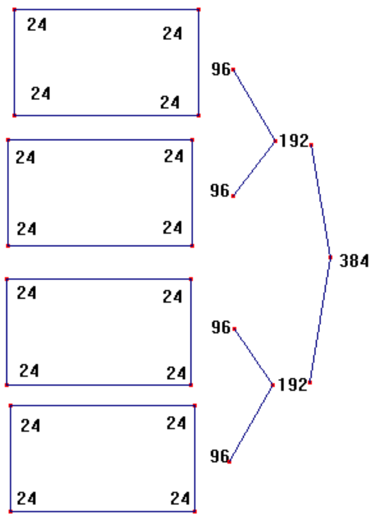
Además, la dificultad del estudiante, ante esta aseveración, se debe al manifiesto de que ellos sólo conocen un camino para llegar a la respuesta que el maestro desea. Nunca se le induce a que llegase a la misma respuesta por otros caminos. Ni que inventasen sus propios procedimientos para llegar a los mismos.

Por esa razón cuando a los estudiantes se les pide que verifiquen que el resultado de una multiplicación cualquiera sea correcta, se muestra que no podrán sostener la verdad de que la respuesta dada sea la correcta.

Cuando Kamii (1995: 115) le pregunto a varios estudiantes que habían tenido una enseñanza constructivista basada en la no enseñanza de los algoritmos tradicionales, que verificarán
24 x 16 , los niños hicieron lo siguientes:




y otros hicieron esto:

24 x 16 = 20 x 16 + 4 x 16 = 10 x 16 + 10 x 16 + 4 x 16 = 160 + 160 + 64 = 384

Pero este pensamiento no está presente en los niños que solo piensan algorítmicamente.

Para el tercer indicador: **Conocimiento de la relación de una multiplicación con una división.**, se aplicó la guía diagnóstica N. 4 del anexo 2.

1. De la siguiente multiplicación:

3 4 5 x 7 2 6

2 0 7 0
6 9 0
2 4 1 5

2 5 0 4 7 0

Planteé dos divisiones.

Se obtuvieron las siguientes respuestas:

**Tabla n. 14.**

| Respuesta de los estudiantes | Cantidad de estudiantes por sección | | |
|---|---|---|---|
| | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 |
| No lo sabe | 20 | 30 | 34 |
| Plantear correctamente las divisiones | 0 | 0 | 1 |

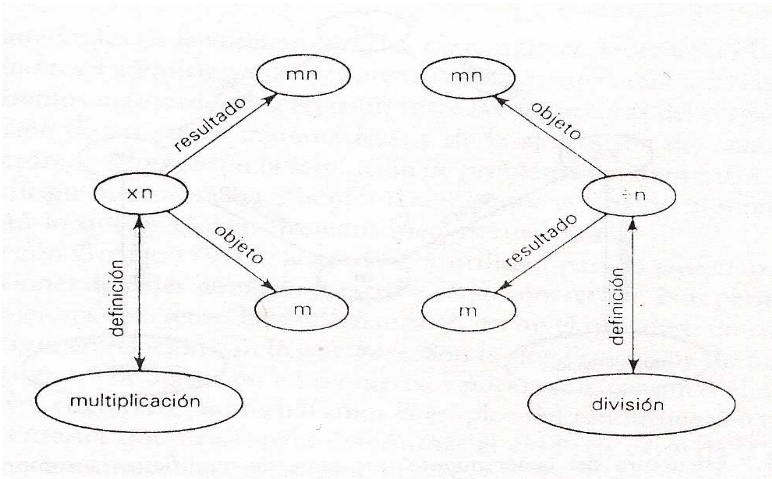
Cantidad de estudiantes que contestaron la pregunta dada.

Las dificultades encontradas es que de las 8 posibles operaciones de división, los estudiantes no saben cual es el dividendo ni el divisor y como encontrar el cociente sin efectuar la división.

Esto indica que hay una separación entre el aprendizaje del algoritmo y el aprendizaje de su significado, se aprende a operar sin entender lo que están haciendo. Los alumnos no captan el significado central de la operación división como la inversa de la multiplicación, Estos alumnos prefieren confiar en la repetición mecánica de una serie de algoritmos que tomar conciencia de las características especiales del problema: plantear una operación y su inversa.

La no comprensión de la división estriba en que no se ha desarrollado en el niño su relación con la multiplicación, con la suma y con la resta, esto por mencionar un caso. Lo que ha ocurrido en el caso de la división con la multiplicación se resume en la figura 1:

**Figura 1.** Relación actual de la multiplicación y la división




Se define la multiplicación como operación de " n – veces" ( x n ). La operación x n tiene un objeto (la cosa sobre la que se ejecuta la operación), en este caso la cantidad (m), y un resultado, la cantidad (mn). La división también se define como operación ÷ n; y esta operación también tiene objeto y resultado. La figura representa la estructura de conocimiento de alguien que conoce la multiplicación y la división, pero que no comprende su relación inversa. Las estructuras de multiplicación y división no están unidas.

La tabla 14 evidencia que los estudiantes no conocen la verdadera relación de la multiplicación con la división, que es la desunión que plantea el algoritmo tradicional con las operaciones básicas.

Para el cuarto, quinto y sexto indicador, se presenta la siguiente tabla:

**Tabla n. 15.**

| Indicador | Guía diagnóstica | Número de estudiantes que no conocen la relación planteada |
|---|---|---|
| Relación de la división con la resta | Guía diagnóstica N. 4 | 109 |
| Relación de la división con la suma | Guía diagnóstica N. 5 | 111 |
| Relación de la divino con las tablas de multiplicación | Guía diagnóstica N. 5 | 111 |

Cantidad de estudiantes que contestaron la pregunta dada.

Los resultados evidencian que el algoritmo de la división solamente es enseñado de una sola forma, llevando al estudiante a desconocer la relación existente entre las operaciones básicas. Con lo descrito anteriormente puede deducir que los estudiantes no conocen métodos no tradicionales para resolver multiplicaciones y divisiones.

## 4.3. RESULTADOS DE LAS GUÍAS DE TRABAJO:

Si se considera que los estudiantes en sus respuestas han indicado que no conocen modelos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones, el 100% de ellos utilizan modelos tradicionales, entonces el que ellos logren comprender los nuevos modelos es muy positivo.

Al realizar la lluvia de ideas para discutir los modelos, ellos fueron contestando las preguntas de acuerdo a su entendimiento, se fue guiando el proceso provocando comparaciones entre lo que ellos sabían y lo nuevo. Resolvieron el problema planteado en la guía de trabajo y se retroalimentó el proceso con otros ejercicios para que compararan el error cometido anteriormente y la nueva experiencia de cómo solucionarlo.

Los resultados se presentan a continuación:

### 4.3.1 Análisis de la guía de trabajo nº 1, Anexo 3

En esta guía se presentó a los estudiantes el modelo a utilizar, para ello se insertaron preguntas dirigidas con la finalidad de que descubrieran la relación existente entre la suma y la multiplicación.

Se trabajo en base a la siguiente cantidad de estudiantes:

**Tabla. n 16.**

| Secciones | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total |
|---|---|---|---|---|
| Cantidad de estudiantes | 40 | 38 | 43 | 121 |

Cantidad de estudiantes a los cuales se les aplicó las guías de trabajo.

En la siguiente tabla se presentan los porcentajes de los alumnos que contestaron correctamente los ejercicios propuestos, una vez que ellos comprendieron el modelo.

**Tabla nº 17**.

| Ejercicio | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | promedio | Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|
| 35 x 6 | 75% | 89% | 70% | 78% | |
| 23 x 10 | 75% | 89% | 70% | 78% | |
| 35 x 10 | 73% | 84% | 70% | 75% | |
| 36 x 25 | 50% | 74% | 47% | 56% | - Al principio no existía estrategias para resolverlo. |
| 46 x 50 | 38% | 61% | 21% | 39% | - Al principio no existía estrategias para resolverlo. |
| 456 x 100 | 25% | 34% | 19% | 26% | - Al principio no existía estrategias para resolverlo. |

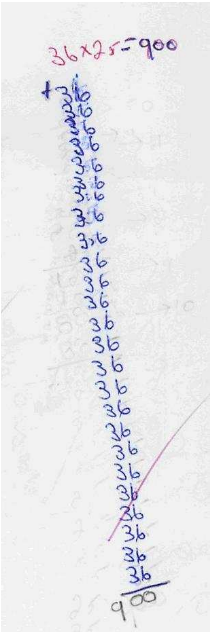
Porcentaje de aciertos por ejercicio de la guía de trabajo basado en el modelo de suma reiterada para resolver una multiplicación.

En este caso las últimas 3 multiplicaciones, el 100% de los estudiantes no las pudieron resolver. La dificultad radica en que no poseían estrategias de agrupación para resolverlas.

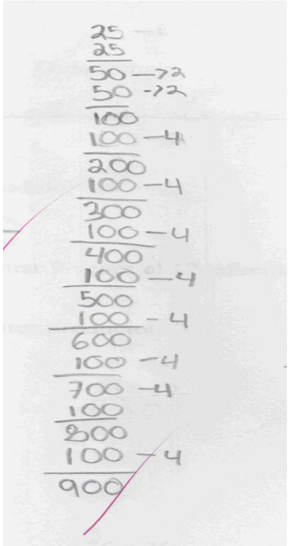
En este sentido Schoenfeld (1989: 144) dice que: “si los alumnos sólo pueden usar un procedimiento ciegamente o sólo pueden usar una técnica en circunstancias exactamente iguales en las que la aprendieron, la educación en gran medida ha fracasado”

Este planteamiento de Schoenfeld se evidencia en los resultados obtenidos, ya que al no tener una estrategia para desarrollar el ejercicio, ellos resolvieron el ejercicio de la forma tradicional y luego colocaron en columna el número a sumar y al final solo colocaron la respuesta obtenida al principio.

Ellos hicieron esto:




Los demás estudiantes no lo resolvieron. Al concluir los ejercicios y observar el problema, se tuvo que aplicar una retroalimentación para que lograran la comprensión total del modelo, no obstante de acuerdo con la tabla anterior, los procedimientos largos no son del agrado del estudiante, la mayoría siguió haciendo lo anterior, otros simplemente no lo quisieron intentar y otros si lograron el objetivo, esto es el 56% en la pregunta 4, 39% en la pregunta 5 y 26% en la pregunta 6, estos últimos hicieron lo siguiente:




Logrando la respuesta final. El que llegaran a la respuesta tiene mucho que ver en las estrategias que tiene el estudiante para resolver problemas, ya que  los métodos repetitivos (algorítmicos), además de conducir a soluciones poco creativas, incapacitan al alumno muchas veces para resolver el problema por el hecho de no coincidir exactamente con los ejemplos ya utilizados en clase. Este aspecto esta ligado al hecho que el alumno no ha concebido anteriormente la relación de la suma con la multiplicación, ya que el algoritmo tradicional no une las cuatro operaciones básicas. Otra de las dificultades radica en la responsabilidad, a pesar que las guías de trabajo representan puntos acumulados, hubo 21 estudiantes que no la presentaron.

Sólo mediante una comprensión profunda del problema, a partir de los conceptos adquiridos significativamente en el aula, el alumno puede encontrar la estrategia adecuada para su resolución.

Con respecto al dominio de este modelo, se califica de acuerdo al número de ejercicios que tienen buenos, en este modelo el 68% contestaron 4 ó más ejercicios de forma correcta (Tabla N. 18, anexo 5). Ya que 21 estudiantes no presentaron las guías, esto representa el 17% significa que el 17% restante hicieron incorrectamente los ejercicios.

### 4.3.2 Análisis de la guía de trabajo N. 2, Anexo 3

La guía de trabajo a desarrollar contenían 6 problemas de multiplicación que debían de ser resueltos por medio de la propiedad distributiva, los aciertos obtenidos se describen a continuación, y además, las dificultades encontradas:

**Tabla nº 19**.

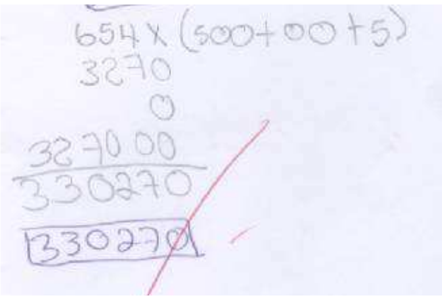
| Ejercicio | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|
| 234 x 24 | 45% | 55% | 84% | 62% | -Problemas en la descomposición del multiplicador<br>-Resolvieron de la forma tradicional<br>- no lo resolvieron |
| 435 x 57 | 48% | 47% | 79% | 59% | |
| 546 x 123 | 30% | 37% | 61% | 44% | |
| 768 x 305 | 30% | 39% | 53% | 41% | |
| 744 x 405 | 40% | 39% | 49% | 43% | |
| 654 x 505 | 38% | 39% | 42% | 40% | |

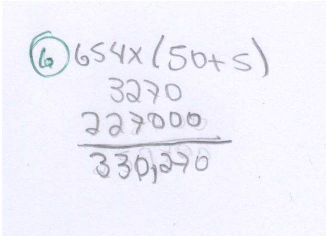
Porcentaje de aciertos de la guía de trabajo basado en el modelo de suma reiterada para resolver una multiplicación.

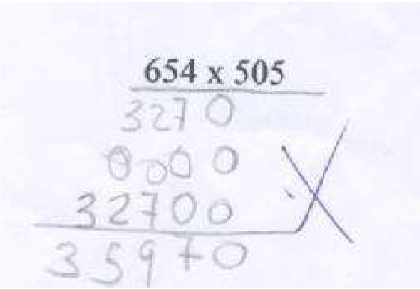
El objetivo principal era tratar de solventar el problema en el cual el multiplicador tiene un cero en la cifra de las decenas, y que comprendieran su valor posicional. No obstante, comparando los resultados de los ejercicios de la prueba diagnóstica N. 1, con la multiplicación de este mismo estilo, los resultados no son alentadores, ellos tienen dificultades cuando el multiplicador posee ceros en la cifra de las decenas.

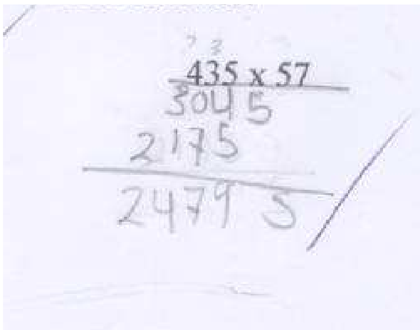
Uno de los principales problemas encontrados es que los estudiantes no supieron descomponer correctamente el multiplicador, de allí que la multiplicación fuera contestada incorrectamente.

Como se podrá observar, en las figuras siguientes, el 505 lo descompusieron de dos formas, aunque el primero es correcto, puede llegar a incidir en la respuesta y la segunda desde luego que es incorrecta, mostrando una vez más los problemas de valor posicional que tienen los estudiantes. Otros no aplicaron la propiedad distributiva y la efectuaron de forma tradicional:

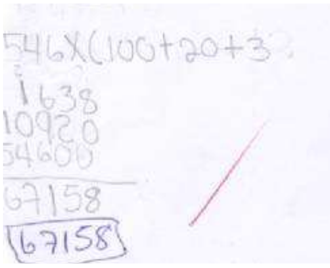



Y muy pocos lograron comprender lo que se deseaba del problema: el valor posicional, ejemplo de ello:




Idéntico al caso anterior, la responsabilidad es otro factor a considerar ya que 22 estudiantes no presentaron esta guía para un 18%, esto significa que para el ejercicio 768 x 305 lo contestaron correctamente el 41 % y el 41% restante lo contestó de la forma tradicional o no lo resolvió correctamente.

Con respecto a la preferencia, de acuerdo a la tabla N. 20 (anexo 5) se tiene que el 45% de los estudiantes contestaron correctamente los problemas planteados y el 18% no lo presentaron, esto indica que el 37% resolvieron los problemas de forma incorrecta. Destacándose para ellos los problemas planteados anteriormente. Con esto se concluye, de acuerdo con nuestra tabla de medición, que no poseen un dominio del modelo.

### 4.3.3 Análisis de la guía de trabajo N. 3, Anexo 3

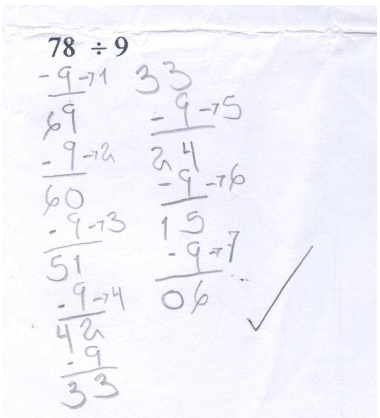
La guía de trabajo N. 3, estaba orientada a la resolución de la división por medio de la resta sucesiva, al analizar ejercicio por ejercicio se obtuvo lo siguiente:

**Tabla nº 21**.

| Ejercicio | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|
| 78÷9 | 80% | 53% | 44% | 59% | El principal problema es establecer el cociente y el residuo.<br>Problemas con la operación resta<br>No presentaron la guía. |
| 345 ÷ 76 | 58% | 55% | 30% | 47% | |
| 845 ÷ 123 | 50% | 53% | 35% | 45% | |
| 1234 ÷212 | 50% | 47% | 35% | 44% | |

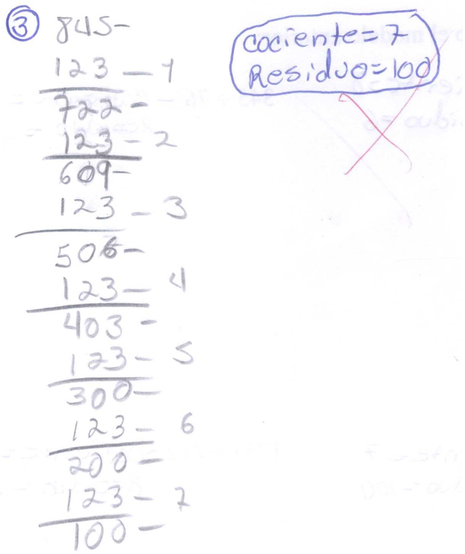
Porcentaje de aciertos de la guía de trabajo basado en el modelo de resta reiterada para resolver una división.

Al principio se le pidió a los estudiantes que no se limitaran a resolver solamente la división, sino que estableciera cual era el cociente y el residuo, sin embargo este fue un problema con ellos ya que la costumbre parece ser solamente resolver la operación, este proceso es el que transmiten cuando resuelven problemas, ellos se limitan a resolver el algoritmo y no a contestar las preguntas:




Este estudiante resolvió correctamente el ejercicio, utilizando muy bien el modelo, pero no colocan cuál es el cociente y el residuo.

Otro problema encontrado es el relacionado con la operación resta, se observa que en la segunda resta toma prestado una decena y lo ignora en el siguiente paso, confirmando que hay falta de comprensión del valor posicional:




De acuerdo con la tabla N. 22 (anexo 5), se puede establecer que el 45% de los estudiantes comprendieron el modelo, luego 27 de ellos no presentaron la guía para un 22% indicando que el 33% lo contestaron incorrectamente. Esto indica que los estudiantes no dominan el modelo propuesto.

### 4.3.4 Análisis de la guía de trabajo N. 4, Anexo 3

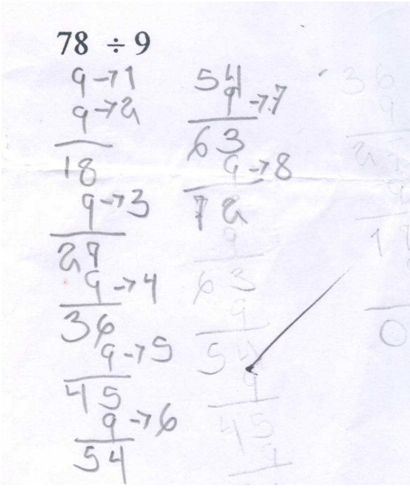
La guía de trabajo N. 4, estaba orientada a la resolución de la división por medio de sumas sucesivas, al analizar ejercicio por ejercicio se obtuvo lo siguiente:

**Tabla nº 23**.

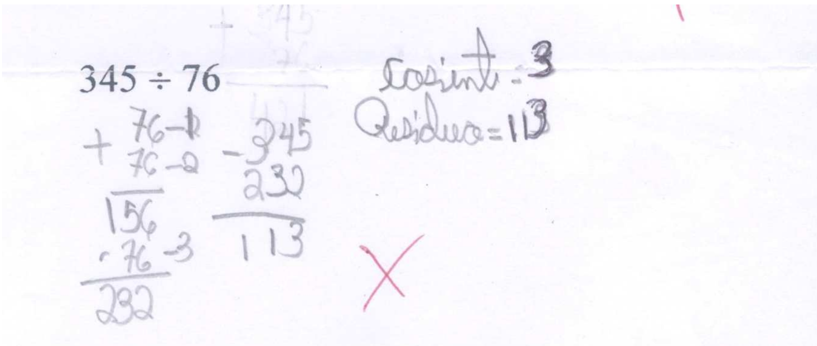
| Ejercicio | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|
| 78÷9 | 78% | 68% | 53% | 66% | El principal problema es establecer el cociente y el residuo.<br>No presentaron la guía<br>Problemas en la definición de la división |
| 345 ÷ 76 | 65% | 63% | 42% | 56% | |
| 845 ÷ 123 | 70% | 61% | 47% | 59% | |
| 1234 ÷212 | 68% | 61% | 40% | 55% | |

Porcentaje de aciertos de la guía de trabajo basado en el modelo de suma reiterada para resolver una división.

Aquí, también el definir el cociente y el residuo fue un problema, ya que no establecen cual es el cociente y el residuo




En el siguiente caso, la definición de división no es comprendida ya que el residuo es mayor que el divisor:




Y además la suma de 76 + 76 la efectúa mal, con respecto a la responsabilidad,  29 estudiantes no presentaron la guía.

La tabla N. 24 (anexo 5),  nos muestra que el 59% de los estudiantes lograron comprender el modelo y el 24 % corresponde a los  29 estudiantes que no presentaron la tarea,  con lo cual el 17 %  contestó de forma incorrecta los ejercicios propuestos. Esto indica que  el modelo fue comprendido por los estudiantes, su dominio es bueno según la escala tomada.

### 4.3.5 Guía de trabajo N. 5, Anexo 3

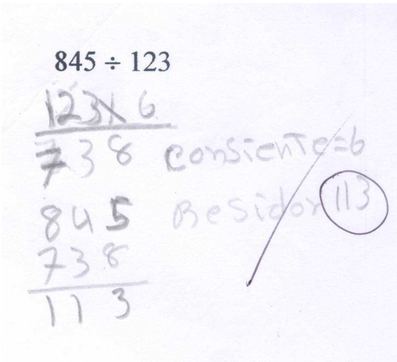
La guía de trabajo N. 5, estaba orientada a la resolución de la división por medio de la multiplicación, al analizar ejercicio por ejercicio se obtuvo lo siguiente:

**Tabla nº 25**. .

| Ejercicio | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|
| 78÷9 | 48% | 66% | 28% | 46% | El principal problema es establecer el cociente y el residuo.<br>No presentaron la guía<br>Problemas con la definición de la división |
| 345 ÷ 76 | 48% | 71% | 33% | 50% | |
| 845 ÷ 123 | 43% | 58% | 26% | 41% | |
| 1234 ÷212 | 58% | 63% | 28% | 48% | |

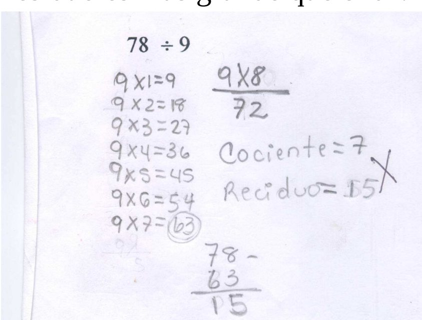
Porcentaje de aciertos de la guía de trabajo basado en el modelo de multiplicación para resolver una división.

Igual que en los otros casos, el problema de definir el cociente y el residuo se pudo apreciar aquí también:




Aquí la resta la efectúa mal y desde luego el residuo está malo.

En esta división el residuo es más grande que el divisor:



Otra observación fue que los estudiantes tienen la costumbre de borrar algunas operaciones, como en el primer ejercicio parece ser que de un solo encuentran el cociente, no se evidencia el que estuvieron buscando dicho número, como en el caso 2.

De acuerdo a la tabla n. 26 (anexo 5) el 54% de los estudiantes lo resolvieron correctamente, lo que indica que el dominio es bueno de acuerdo a la tabla N. 6. Y además el 36%, que representa 43 estudiantes, no presentaron la guía, esto hace que el 10% de los estudiantes hicieran los procedimientos de una forma incorrecta.

### 4.3.6 Análisis de la guía de trabajo N. 6, Anexo 3

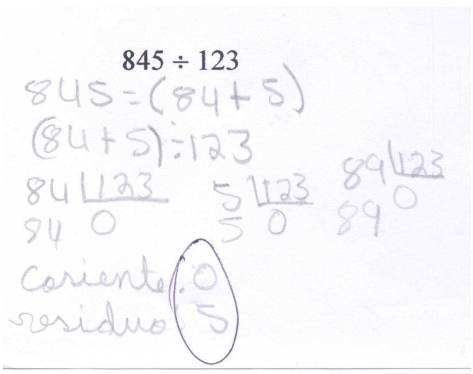
La guía de trabajo N. 6, estaba orientada a la resolución de la división por medio de la propiedad distributiva, al analizar ejercicio por ejercicio se obtuvo lo siguiente:

**Tabla nº 27**.

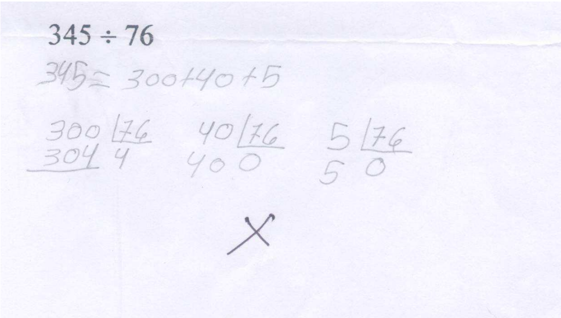
| Ejercicio | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Observaciones |
|---|---|---|---|---|---|
| 78÷9 | 50% | 63% | 14% | 41% | ✓ Hubo problemas en la descomposición.<br>✓ Las divisiones parciales fueron realizadas mal.<br>✓ La mayoría no lo intento. |
| 345 ÷ 76 | 23% | 39% | 5% | 60% | |
| 845 ÷ 123 | 38% | 42% | 12% | 30% | |
| 1234 ÷212 | 30% | 34% | 9% | 24% | |

Porcentaje de aciertos de la guía de trabajo basado en el modelo de la propiedad distributiva para resolver una división.

La descomposición fue uno de los problemas presentados:



Y otra situación problemática fue que las divisiones parciales la efectuaron de la manera tradicional, que desde luego no dominaban, como se estableció anteriormente:




De acuerdo con la tabla n. 28 (anexo 5), el 23 % de los estudiantes contestaron correctamente la guía y el 45% (54 estudiantes) no presentaron la guía, esto hace que el 32% contestaran de forma incorrecta los problemas. Se puede notar que el uso de la propiedad distributiva para resolver una división, fue entendida por el 23% de los estudiantes, lo cual indica que su dominio no es aceptable.

Con respecto al indicador: **modelos mejor comprendidos por los estudiantes**, se tiene los siguientes resultados:

**Tabla nº 29**.

| Modelo | Porcentaje | Dominio |
|---|---|---|
| Multiplicación por medio de la suma | 67% | El dominio del modelo es bueno |
| Multiplicación usando la propiedad distributiva | 45% | No dominan el modelo |
| División por medio de restas sucesivas | 45% | No dominan el modelo |
| División por medio de sumas sucesivas | 59% | El dominio es bueno |
| División por medio de la multiplicación | 54% | El dominio es bueno |
| División usando la propiedad distributiva | 23% | No dominan el modelo |

Resumen en porcentaje y su nivel de dominio de los modelos utilizados.

En base a estos resultados se puede concluir que los modelos que ellos comprendieron fueron:
Para la multiplicación: el de las sumas sucesivas.
Para la división: El de las sumas sucesivas y el de la multiplicación.

### 4.4. RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN FINAL. LA TRANSFERENCIA.

Con respecto al indicador: resolución de multiplicaciones y divisiones por medio de modelos alternativos, la siguiente tabla especifica la cantidad de alumnos que contestaron correcta e incorrectamente cada uno de los item de la evaluación aplicada al final de la experimentación.

Se hace notar que no se le pidió al estudiante el modelo a utilizar para resolver los ejercicios, esto para conocer su autonomía en cuanto a que modelo utilizar.

Los ejercicios son:

6 a) 789 x 503 6b) 276 x 409

7a) 34381 ÷54 7b) 8493 ÷5

**Tabla 30.**

| Tipo de Item | N. | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Efectuar multiplicaciones | 6 a) | Correctas 18 | Correctas 23 | Correctas 21 | 62 | 53% |
| | | Incorrectas 20 | Incorrectas14 | Incorrectas 21 | 55 | 47% |
| | 6 b) | Correctas 14 | Correctas 22 | Correctas 24 | 60 | 51% |
| | | Incorrectas 24 | Incorrectas 15 | Incorrectas 18 | 57 | 49% |
| Efectuar divisiones | 7 a) | Correctas 18 | Correctas 18 | Correctas 14 | 50 | 43% |
| | | Incorrectas 20 | Incorrectas 19 | Incorrectas 28 | 67 | 57% |
| | 7 b) | Correctas 29 | Correctas 31 | Correctas 31 | 91 | 78% |
| | | Incorrectas 9 | Incorrectas 8 | Incorrectas 11 | 28 | 22% |

Cantidad y porcentaje de estudiantes que contestaron correcta e incorrectamente los ejercicios de multiplicación y división

La tabla anterior nos muestra que:

1) De la pregunta 6 inciso a) de trabajo práctico se espera que los estudiantes resolvieran correctamente una multiplicación, pero el 53% lo hizo de forma correcta y el 47% de forma incorrecta.

2) De la pregunta 6 inciso b) de trabajo práctico se esperaba que los estudiantes resolvieran de forma correcta la multiplicación que se planteó pero el 51% lo realizó correctamente y el 49% de forma incorrecta.

3) De la pregunta 7 inciso a) de trabajo práctico se espera que los estudiantes resolvieran de forma correcta la división con dos cifras en el divisor y 43% lo resolvieron de forma correcta y 57% de forma incorrecta.

4) De la pregunta 7 inciso b) de trabajo práctico se espera que los estudiantes resolvieran de forma correcta la división con una cifra en el divisor y 78% lo resolvieron de forma correcta y 22% de forma incorrecta.

**Conclusión:**

De la pregunta 6 y los incisos a y b se esperaba que ellos utilizaran alguno de los modelos que se enseñó, es decir el de sumas sucesivas y la propiedad distributiva, pero todos utilizaron el algoritmo tradicional.

De la pregunta 7 y los incisos a y b se esperaba que ellos utilizaran alguna técnica que se había enseñado en clase par resolver esas divisiones, pero todos lo hicieron de la forma tradicional.

Es decir que no hubo transferencia de conocimientos, el algoritmo tradicional siguió dominando en la resolución de las multiplicaciones y divisiones. Esto debido a que no existió una necesidad imperante en los alumnos para resolver los problemas. Ya que siguió la misma regla de solución que había aprendido en la escuela primaria, ese modelo convierte poco a poco los ejercicios en una receta que al final los vuelven mecánicos.

Los 6 años de tendencia conductista que los estudiantes han tenido, que para Brosseau (2000: 12) "consiste en repetir las preguntas, en enseñar como se establece la respuesta y en hacer producir las técnicas de conteo en asociaciones pregunta-respuesta hasta lograr una reproducción perfecta", tuvieron un dominio predominante.

Cedillo (1999: 17) opina que "quizás la mayor crítica a este enfoque es que propicia un aprendizaje mecanicista que parece no favorecer la comprensión de conceptos, ni un uso eficiente de la aritmética para resolver problemas". Las reformas deben de ir encaminadas a disminuir notablemente el énfasis en la enseñanza de los algoritmos de las operaciones aritméticas y otorgar especial atención a que los alumnos desarrollen estrategias no convencionales, y además que sean sus propias estrategias las que imperen en la resolución de problemas aritméticos. Para Segarra (2002: 40) "el objetivo de todo esto no es dejar a un lado el cálculo; todo lo contrario, de lo que se trata es de rechazar el cálculo rutinario sin comprensión de la realidad y aceptar el tratamiento de problemas realmente prácticos".

Por otro lado, siempre se ha pretendido que los estudiantes sean críticos y que se desenvuelvan de una forma independiente, estas actitudes se deben fomentar en ellos desde los primeros años de escolaridad.

Para Kamii, (2004 a:50) la autonomía se refiere a ser gobernado por si mismo y la esencia del mismo es que los niños lleguen a ser capaces de tomar decisiones por su cuenta, para ella la autonomía debe de ser un objetivo de la educación. Su idea se basa en que los objetivos actuales de la educación refuerza la heteronomía de los niños e involuntariamente les impide desarrollar su autonomía. La idea se basa en el hecho que la educación actual exige gran cantidad de memorización. Y también que la educación actual pone más énfasis en los temas que al pensamiento del niño y fue lo que ocurrió en este experimento, como no se le comunicó que modelo utilizar, ellos prefirieron su modelo tradicional, que es el que tienen más interiorizado.

Con respecto al marco teórico, se comprobó lo siguiente, los estudiantes tienen problemas en:

1. El valor posicional.
2. La verificación de las respuestas obtenidas.
3. El cálculo rutinario está inmerso en ellos.
4. No piensan de manera crítica y autónoma.
5. La estructura de las cuatro operaciones básicas no está unida.

# CAPITULO V

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

## CONCLUSIONES

De este trabajo se puede concluir:

1) Los estudiantes tienen problemas con el significado del valor posicional, no tienen estrategias para la verificación de respuestas, el cálculo rutinario está inmerso en ellos, no piensan de manera crítica y autónoma, la estructura de las cuatro operaciones básicas no está unida.

2) Los estudiantes desconocen modelos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones.

3) Los estudiantes de primer curso si son capaces de comprender algunos modelos alternativos, los que mejor comprendieron fueron: a) la multiplicación por medio de sumas sucesivas, b) la multiplicación utilizando sumas sucesivas y utilizando la multiplicación.

4) Es urgente la introducción de un aprendizaje significativo de las operaciones básicas de la aritmética en la escuela primaria, ya que corregir los errores aprendidos no es posible en un periodo corto de tiempo, ya que a pesar de haber comprendido algunos modelos, los estudiantes prefirieron seguir usando el algoritmo tradicional aunque no lo dominan.

5) La comprensión de algunos modelos por parte de los estudiantes conduce a pensar que si éstos se introducen en la escuela primaria podrían tenerse mejores resultados en la comprensión de las operaciones básicas de la aritmética.

## RECOMENDACIONES

En primer lugar, brindar una amplia capacitación a los docentes en el uso de métodos alternativos para resolver multiplicaciones y divisiones, para que comiencen a enseñar la relación de la multiplicación con la suma, la propiedad distributiva en la multiplicación, la relación de la multiplicación con la división, el valor posicional y por otro lado la resolución de la división por medio de la suma, resta, la multiplicación y la propiedad distributiva en la división. Esto implica por parte del docente la tarea de alentar en sus alumnos la invención y utilización de diversidad de procedimientos, coordinar que cada uno explique “el método” que ha utilizado, gestionar la puesta en común en la que se exponen tanto los procedimientos correctos como incorrectos, promover la comparación de las diversas estrategias y el análisis de los errores, estimular la invención de nuevas estrategias entre los alumnos.

En segundo lugar probar los métodos alternativos en estudiantes que aún no han interiorizado el método tradicional. Además se recomienda que el trabajo de construcción de los algoritmos se plantee a partir de situaciones de exploración en las que los alumnos usen diferentes procedimientos poniendo en juego las propiedades de los números y las operaciones. Este trabajo de exploración se verá enriquecido si los alumnos aprenden a realizar cálculos mentales, a elegir diversos procedimientos, a disponer de diferentes recursos de estimación y control de los resultados de las operaciones.

Se recomienda tomar estos procedimientos como objetos de trabajo: compararlos, mejorarlos y también vincularlos con el algoritmo tradicional. La idea es que los estudiantes puedan decidir la conveniencia de realizar un cálculo aproximado o un cálculo exacto, un cálculo mental o el algoritmo tradicional.

# BIBLIOGRAFÍA

Alem,J. (1987). **Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático**. Editorial Gedisa Mexicana , México.

Alfonso, Bernardo. (1998). **Numeración y cálculo**. Editorial Síntesis. España.

Arancibia,Violeta (1999) . **Psicología de la Educación**. Editorial Alfeomega. México.

Bell,E. (1995). **Historia de la Matemática**. McGrall Hill, México.

Boyer, C. **Historia de la Matemática**. Alianza Editorial, España.

Brousseau,Guy. (2000). "Educación y Didáctica de la Matemática", (Pág. 5 - 37) en **Revista en Educación Matemática**. Vol. 12, N. 1. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Carbó , L. & Grácia, V. (2004). **El Mundo a Través de los Números**. Editorial Milenio. España.

Castelnuovo, Enma (2001). **Didáctica de la Matemática Moderna**. Editorial Trillas, México.

Castro, Enrique (2001). "Multiplicación y División". (Pág. 203 - 230) en **Didáctica de la Matemática en Educación Primaria**. Editorial Síntesis. España.

Castro, E., Rico, L. & Castro, E. (1995). **Estructuras Aritméticas Elementales y su Modelización**. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Castro, E. , Rico, L. & Castro, E. (1996). **Números y Operaciones, fundamentos para una aritmética escolar**. Editorial Síntesis. España.

Cedillo, Tenoch. (1999). "Potencial de la calculadora en el desarrollo del sentido numérico. Un estudio con niños de 11 – 12 años de edad". (Pág. 16 - 31) en **Revista en Educación Matemática**. Vol. 11, N. 2. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Chamorro, María del Carmen. (2002). **Didáctica de la Matemática**. Pearson Prentice may. España.

Collete, J. (1986). **Historia de la Matemática**. Editorial Romont, México.

Euclídes. ( ¿ ), **Elementos de Euclídes**.

Ferema. (2001) **Informe del Progreso Educativo de Honduras**, ¿? , Honduras.

Fey, James. (1998). "Cantidad" (Pág. 67 - 101). **La enseñanza agradable de las matemáticas**. Limusa. México.

FONAC. (2000). **Currículo Nacional Básico (CNB).** Tercer Ciclo. Honduras.

Gómez, Bernardo. (1998) **Numeración y Cálculo**. Editorial Síntesis. España.

Grupo Azarquiel (1993) **Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra.** Editorial Síntesis. España.

Gutiérrez, Luis (2002). "Estrategias Didácticas a Tomar en Cuenta en la Construcción y Aplicación de Algoritmos". (Pag. 127 – 143) en **Didáctica de la Matemática en la Formación de Docentes**. Taller Gráfico Impresora Obando. Costa Rica.

Guzmán, M. (1993), **La Enseñanza de las Ciencias y la Matemática**, Editorial Popular, España.

Kamii, Constance Kasuko (1994 a) **El niño reinventa la Aritmética .Implicaciones de la teoría de Piaget**. Editorial A. Machado. España.

Kamii, Constance Kasuko (1994 b) **Reinventando la Aritmética II**. Editorial A. Machado. España.

Kamii, Constance Kasuko (1995) **Reinventando la Aritmética III**. Editorial A. Machado. España.

Kaplan, R. , Yamamoto, T. & Ginsburg, H. ( 1989) "La enseñanza de conceptos matemáticos". (Pág. 59 - 81) en **Currículum y Cognición**. Aique Grupo Editor. Argentina.

Keitel, Christina. ( 1998 ) "¿Cuáles son los objetivos de las matemáticas para todos?". (Pág. 59 - 81) en **Revista de Estudios del Currículum, Didáctica de las Matemáticas**. V. 1. N. 4. Ediciones Pomeres – Corredor. España.

Klingler , C. & Vadillo, G. ( 1999). "Estrategias en la práctica docente". **Psicología Cognitiva**. McGrall Hill. México.

Martí, E. (2002), "Comprensión Matemática: forma y significado", (Pág. 13 - 26) en **La Resolución de Problemas en Matemáticas**, Editorial Grao, España.

Mayer, Richard. (2002). **Psicología de la educación**. Prentice Hall. España.

Maza, Carlos. (1991), **Enseñanza de la Multiplicación y la División,** Editorial Síntesis, España.

Monchón, S. & Román, J. (1995) "Cálculo mental y estación: método, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza". (Pág. 93 - 105) en **Revista Educación Matemática.** V. 7, N.3 Grupo Editorial Iberoamérica, México.

NCTM, (2000), **Principles and Standards for School Mathematics 2000.** Library or Congress Cataloguing, USA.

Nuñez Pérez, José Carlos y otros.(2002). **Estrategias de aprendizaje. Concepto, evaluación e intervención**. Ediciones Pirámide. España.

Peñafiel, Alfino, (1996), "Acción, comunicación y reflexión: componentes esenciales para entender matemáticas" (Pág. 85 - 102) en **Perspectiva en Educación Matemática**, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Resnick, L. & Ford, W., (1998), **La enseñanza de la Matemática y sus fundamentos Psicológicos**, Ediciones Piados Ibérica, España.

Rico, Luis. (1998). "Concepto de currículum desde la educación matemática". (Pág. 7 - 42) en **Revista de Estudios del Currículum, Didáctica de las Matemáticas**. V. 1 . N. 4. Edición Pomares – Corredor. España.

Roldán, J., García, M. & Cornejo, C., (1996) "Dificultades y alternativas en la resolución de problemas matemáticos", (Pág. 40 - 52) en **Revista Educación Matemática**, Vol. 8, N. 1 Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Segarra, Lluis, (2002), "Juego y Matemática" (Pág. 35 - 42) en **La Resolución de Problemas en Matemáticas,** Editorial GRAO, España.

Sfard, A., (2002), "El origen operacional de los objetos matemáticos y la incertidumbre de la reificación -el caso de función", **Hanbook of Internacional Research in Mathematics Education**, Lawrence Erlbaum Associates, Inglaterra.

Schoenfeld,Allan.(1989). "La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas". (Pág. 141 - 170) **Currículum y cognición**. Aique. Argentina.

Smith, D. & Ginsburg, J., (1997) " De los números a los numerales y de los numerales al Cálculo", **Sigma El mundo de la Matemáticas**, Editorial Grijalbo, España.

Steen, Lynn (1998) “Patrones” (Pág. 7 - 16). **La enseñanza agradable de las matemáticas**. Limusa.México.

Trigo, L., (1997), **Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas**, Grupo Editorial Iberoaméricana, México.

UMCE, (2002 a). **Informe Anual de Rendimiento Académico 2002. Tercero y Sexto grado.** Graficentro Editores. Honduras.

UMCE, (2002 b). **Informe de Rendimiento Académico 2002. Tercero y Sexto grado. Cortés**. UMCE. Honduras.

Vernaud, Gérard, (2003), **El niño, las matemáticas y la realidad, problemas de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria,** Editorial Trillas, México.

Zavrotsky, A. (1971). Un procedimiento recomendable para la multiplicación (pag. 11- 31) en **Educación: Revista para los maestros**. N. 11.Venezuela.

ANEXO 1

PRUEBA DIAGNÓSTICA

PRUEBA   DIAGNOSTICA DE MATEMÁTICAS

Nombre de la escuela de donde egreso:_______________________________________________

Nombre del alumno:_______________________________________________________-______

Sección:____________________________   año 2005

1. Conteste de manera ordenada los siguientes ejercicios con operaciones básicas de números naturales:

a) 12, 459 + 3, 798 + 603

b) 124, 829 + 36 + 4, 765 + 9003

c) 12, 001 – 7, 493

d) 6, 749 – 3, 074

e) 342 x 28

f) 1, 302 x 301

g) 8, 493 ÷ 5

h) 34, 381 ÷ 5 4

# ANEXOS 2
# GUÍAS DIAGNÓSTICAS Y
# RESPUESTA DE LOS ESTUDIANTES

Guía diagnóstica n. 1

Al efectuar la siguiente multiplicación:

```
          3  4  5  x  7  2  6
    ___________________________

        2  0  7   0
        6  9  0
  2  4   1  5
  ___________________________

 2  5  0  4  7  0
```

1) En la multiplicación anterior, como comprobaría que la respuesta dada es la correcta

**Contestación de la sección 6:**

- Dividiendo los números multiplicados.
- No lo se . ( 10 estudiantes).
- Multiplicando y después sumar. ( 4 estudiantes).
- Resolviendo la multiplicación correctamente.
- Debemos multiplicar exactamente y saber que esta buena.
- Se vuelve a multiplicar.
- Haciéndola así sabré si la respuesta esta bien
- Para comprobarla también se puede dividir y si la respuesta es correcta la multiplicación esta correcta.
- Tendríamos que dividir.
- Volviéndola a hacer.
- Se multiplica la de abajo con los de arriba de 726. ( 2 estudiantes).
- Dividiendo la respuesta con los números del multiplicador.
- Porque en la multiplicación se suma y se divide.
- Volviendo a corregir la multiplicación a si se sabe  la respuesta correcta.

- Se comprobaría dividiendo el 2 con el resultado.
- Dividiendo el 726 con el resultado.
- Multiplicando y desarrollándola.
- Dividiendo el resultado con el multiplicador. ( 4 estudiantes)..
- Esta bueno porque la multiplicación al multiplicarlo los números están bien colocados así es la respuesta esta buena.
- Dividiéndolo y lo comprobamos.
- Sumando lo multiplicado.
- Dividiendo el resultado con el multiplicador hasta que de en el numerador.
- Sumando o multiplicando la cifra.

**Contestación de la sección 10:**

- No se . ( 25 estudiantes)..
- Si se comprueba pero la multiplicación no es correcta.
- Rectificándola, volviéndola a pasar, sumándola otra vez.
- Sumando de arriba para abajo.
- Sumando.
- Se comprueba haciéndola otra vez y allí es cuando se mira si esta igual.
- Se tiene que empezar desde arriba hasta abajo.
- se comprueba que es correcta porque los resultados que dan cuando multiplicamos se suman.
- No esta correcta
- Sumando los números dados por la multiplicación.
- ya no me acuerdo.
- Sumando de abajo para arriba.
- Sumando las dos cifras para arriba para abajo.

**Contestación de la sección 27:**

- Tengo que sumar la multiplicación luego restarla.
- tenemos que dividir el resultado con el de arriba.

- Dividiendo el resultado por 726. ( 2 estudiantes).
- Dividiendo las cifras del resultado.
- Se multiplica en forma correcta.
- Multiplicamos y sumamos los componentes.
- Debemos multiplicar el resultado con 726 para saber si nos da lo mismo.
- no lo se. ( 6 estudiantes).
- Se suma la multiplicación.
- La respuesta es correcta.
- hay que sumar y comprobar los números para que la respuesta sea correcta.
- La comprobé a simple vista.
- Tengo que multiplicarla.
- Multiplicando y sumando las cantidades.
- Se suma el de arriba y el resultado.
- Multiplicando el multiplicando y el multiplicador y luego suman la multiplicación.
- Dividiendo 250470 x 726. ( 2 estudiantes).
- Se suman los resultados de los productos parciales .
- Se divide el resultado de la multiplicación.
- Dividiendo por 726.
- Se debe de sumar el producto parcial.
- Lo multiplico.
- Tengo que multiplicar y sumarla.
- Dividir y sumar la cifra. ( 2 estudiantes).
- tengo que multiplicar y después sumar a ver si esta correcta.
- Dividir el resultado con los de arriba.
- Dividiendo el resultado con el dividendo y sumar el residuo.
- Multiplicar el cociente y después sumar todo.
- Si esta correcta.
- Hay que dividir el resultado y la última cifra.

Guía diagnóstica n. 2

Al efectuar la siguiente multiplicación:

| | |
|---|---|
| 3 4 5 x 10 | 3 4 5 x 1 0 0 |
| 3 4 5 0 | 3 4 5 0 0 |

1) En las multiplicaciones anteriores, como comprobaría que la respuesta dada es la correcta

**Contestación de la sección 6:**

- Desarrollándola de nuevo
- Multiplicando y sumando.
- Restando
- Dividiendo las multiplicaciones.
- Volviendo a dividir.
- Dividiendo el resultado con el multiplicador. ( 2 estudiantes).
- Multiplicándolos.
- No se. ( 10 estudiantes).
- Por medio de la multiplicación es decir multiplicándola.
- Comprobándola bien así me aseguro si esa respuesta esta bien.
- Multiplicando. ( 2 estudiantes).
- Verificando las multiplicaciones nuevamente.
- Se divide.
- Corrigiendo la multiplicación. ( 2 estudiantes).
- Efectuar correctamente la multiplicación.
- Se divide el resultado con el multiplicador. ( 2 estudiantes).
- Multiplicando la comprobación de lo multiplicado.
- Sumando.
- Divide el multiplicación con la respuesta.
- Se divide el resultado entre el multiplicando.
- la multiplicación la divido.

- casi toda multiplicación se lleva por multiplicar varios ceros entonces antes de multiplicar varios ceros es mejor bajarlos.
- Comprobaría dividiendo 100 entre el resultado
- La multiplicación la comprobaría haciendo otra o revisándola o dividiendo.
- Dividiendo el resultado.
- sabiéndose las tablas de multiplicar y se divide el resultado con el multiplicador.

**Contestación de la sección 10:**

- No se . ( 26 estudiantes).
- Porque lo que multiplicamos luego se suma.
- Porque si usted multiplicara daría lo mismo.
- Dividiendo 345 entre 10.
- Porque mirándola se mira que es correcta.
- Multiplicando 345 x 10 da el resultado correcto.
- Dividiría el producto entre 100.
- Porque salen en las multiplicaciones y en otras como divisiones y restas.
- Es correcta.
- Porque pone dos ceros al final y si pusiéramos dos filas sería más costoso entonces están buenas las dos.
- Dividiría 34,500 entre 100.
- dividiéndola.

**Contestación de la sección 27:**

- Dividiendo 3450 entre 10
- Porque me enseñaron la regla.
- No se. ( 14 estudiantes).
- Dividiendo la respuesta por el multiplicador.
- Multiplicando y sumando el resultado.
- Multiplicando después sumando.
- Haciéndola como está ahí.
- Hay que sumarla.

- Multiplicando. ( 3 estudiantes).
- Multiplicando la cifra y sumándola.
- Dividimos el 10 ó 100 y después sumamos el resultado con el resultado anterior.
- Porque la multiplicación es así.
- Sumando y multiplicando los productos.
- Porque el cero a la derecha no vale nada.
- Solo se multiplica el 1 y el cero e agrega al final.
- Ver si la respuesta es la correcta.
- Porque se entiende bien y se colocan bien los números.
- Se divide el 3450 entre 10. ( 3 estudiantes).
- Se divide el multiplicador y el resultado.
- Dividiendo la primera por 10 y la segunda por 100.
- Porque multiplicamos las cifras que hay.
- porque se coloca el cero abajo y se tiene que sumar correctamente y después hay que contar bien.

Guía diagnóstica n. 3

Al efectuar la siguiente multiplicación:

```
      3  4  5  x 3  0  4
           1  3  8  0
  1    0  3  5
  ____________________
  1  0  4  8  8  0
```

1) En las multiplicaciones anteriores, como comprobaría que la respuesta dada es la correcta

**Contestación de la sección 6:**

- Desarrollándola.
- No se. ( 13 estudiantes).
- Dividiendo el resultado con el multiplicador. ( 2 estudiantes )
- Dividiendo las multiplicaciones.
- Dividiéndola y comprobando.
- Dividiendo el multiplicador y el resultado. ( 2 estudiantes )
- Sumando lo multiplicado.
- Multiplicarla correctamente para verificar si es correcta.
- Multiplicando y sumando la cifra. ( 2 estudiantes )
- Hay que multiplicar correctamente.
- Restando.
- Multiplicando y sumando las tres cifras.
- Verificando nuevamente la multiplicación.
- Comprobándolas, hago otra igual y si me da lo mismo esta buena.
- Sumando los números del resultado con el total.
- Volviendo a dividir.
- Dividiendo 304 entre 104880.
- Dividiendo 304 con el resultado.
- Sumando las cantidades que multiplique.

- Es correcto porque en la multiplicación de cada número multiplica lo multiplicado y debajo de un primer número no se coloca nada hasta el número siguiente por eso es muy correcto.
- Sumando bien y después dividiendo el multiplicador por la respuesta de la multiplicación.
- Sumaría la multiplicación y el total es el resultado.
- Multiplicando 304 x 345
- Se tiene que dividir.

**Contestación de la sección 10:**

- No se . ( 27 estudiantes).
- Multiplicando bien y sumando bien para que nos salga perfecta.
- Primero lo divido con 345 – 304.
- Sumando de abajo para arriba. ( 2 estudiantes).
- Se divide para comprobar si es correcta.
- Porque en la primera pone tres ceros y la prime pone un solo cero no pone tres.
- Porque la segunda no es correcta pero puede ser correcta y la prime es correcta porque los salen los números que los para multiplicar porque la prime es correcta.
- Se divide el último resultado con los números del multiplicador.
- Porque lo que multiplicamos luego se suma.

**Contestación de la 27:**

- Multiplicando. ( 2 estudiantes).
- Sume bien la suma parcial y lo puedo comprobar con calculadora.
- Porque hay que sumar los factores de la multiplicación.
- Divida por 304.
- No lo se. (10 estudiantes).
- Haciéndola.
- Sumarla.
- Porque el cero no tiene valor.
- Dividiéndola y se manda la cifra.
- Dividiendo o sumando las cifras.

- La primera es la correcta.
- Suma y tiene tres cifras.
- Multiplicándola y sumándola. ( 2 estudiantes )
- Dividiendo el resultado con 304 y después sumar el resultado con el resultado anterior.
- Dividiendo la respuesta con el multiplicador.
- Se suma producto parcial.
- Divida 104880 por 304.( 3 estudiantes )
- Sumando los resultados de la multiplicación.
- Porque primero sumamos y después comprobamos a ver si es la respuesta correcta.
- Volviéndola a hacer.
- Sumando las cantidades en las multiplicaciones.
- Multiplicando 345 x 304 correctamente.
- Que está más ordenada.
- Multiplicando 104880 x 304.
- Dividiendo y sumando la cifra.( 2 estudiantes )

Guía diagnóstica n. 4

Nombre:________________________________________ Sección:_________

1. De la siguiente multiplicación:

```
  3 4 5 x 7 2 6
  ______________________
        2 0 7 0
        6 9 0
   2 4 1 5
  ______________________
  2 5 0 4 7 0
```

Planteé dos divisiones.

**Contestación de la sección 6: 37 estudiantes**

1. No lo se ( 20 estudiantes)
2. Planteó 345 ÷72 y 345 ÷ 6. ( 3 estudiantes )
3. Planteó 726 ÷ 345 ( 5 estudiantes)
4. Planteó 345 ÷ 726 y 250 ÷ 470 ( 2 estudiantes )
5. Planteó 690 ÷ 26 y 2415 ÷ 72
6. Planteó 250470 ÷ 726 pero cociente 332 y 250470 ÷ 345 cociente 899.
7. Planteó 20470 ÷ 345
8. Planteó 2070 ÷ 726
9. Planteó 3450 ÷ 726 y 726 ÷ 345 ( 2 estudiantes)
10. Planteó 250470 ÷ 726 cociente 345 y 250470 ÷ 345 sin efectuar.

**Contestación de la sección 10: 36 estudiantes**

1. No lo se ( 30 estudiantes)
2. Planteó 250470 ÷ 726 sin cociente y 726 ÷ 345
3. Planteó 45 ÷ 5 y 26 ÷ 2
4. Planteó 726 ÷ 2 y 250 ÷ 4
5. Planteó 98 ÷ 23 y 105 ÷ 46
6. Planteó 345 ÷ 726
7. Planteó 396 ÷ 5 y 456 ÷ 4

**Contestación de la sección 27: 36 estudiantes**

1. No lo se ( 34 estudiantes)
2. Planteó 250470 ÷ 726 cociente 345
3. Planteó 250470 ÷ 726 sin cociente y 250470 ÷ 345 sin cociente
4. Planteó 345 ÷726 y 726 ÷345

2. La siguiente división resuélvala utilizando la operación resta:

765 ÷ 96

**Contestación de la sección 6 : 37 estudiantes**

1. No lo se ( 27 estudiantes)
2. Efectuó la división tradicionalmente 765 ÷ 96 ( 9 estudiante)
3. Efectuó la resta 765 – 96 = 649

**Contestación de la sección 10 : 36 estudiantes**

1. No lo sé ( 27 estudiantes)
2. Efectúo 765 – 96 = 669 ( 2 estudiante)
3. efectuó la división tradicional 765 ÷ 96 ( 7 estudiante)

**Contestación de la sección 27 : 36 estudiantes**

1. No lo sé ( 36 estudiantes)

Guía diagnóstica n. 5

Nombre:________________________________________ Sección:_________

1. La siguiente división resuélvala utilizando la operación suma:

$765 \div 96$

**Contestación de la sección 6 : 37 estudiantes**

1. No lo sé ( 18 estudiantes)
2. Efectúo 765 + 96 = 861 ( 11 estudiante)
3. Efectuó 1431 + 1764 = 3195 ( 2 estudiante )
4. efectuó la división tradicional 765 ÷ 96 ( 6 estudiante)

**Contestación de la sección 10 : 37 estudiantes**

1. No lo sé ( 35 estudiantes)
2. Efectúo 765 + 96 = 861 ( 2 estudiante)

**Contestación de la sección 27 : 37 estudiantes**

1. No lo sé ( 36 estudiantes)
2. Efectúo 96 + 96+ 96 + 96 + 96 + 96+ 96 = 662 ( 1 estudiante) sin especificar

2. La siguiente división resuélvala utilizando la operación multiplicación:

**765 ÷ 96**

**Contestación de la sección 6 : 37 estudiantes**

1. No lo sé ( 18 estudiantes)
2. Efectúo 765 x 96 ( 16 estudiante)
3. efectuó la división tradicional 765 ÷ 96 ( 3 estudiante)

**Contestación de la sección 10 : 37 estudiantes**

1. No lo sé ( 36 estudiantes)

2. Efectúo 765 x 96  ( 1 estudiante)

**Contestación de la sección 27 : 37 estudiantes**

1. No lo sé ( 37 estudiantes)

ANEXO 3

GUÍAS DE TRABAJO

Guía trabajo N. 1

Nombre:________________________________________ Sección:_________

Utilizando el siguiente modelo en la multiplicación:

1. Efectúe la siguiente multiplicación 12 x 9 .

Modelo a utilizar:

Si al 12 lo sumas 9 veces seguida: observa y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relación existe entre la respuesta obtenida sumando y la multiplicación que hiciste?

b) ¿Crees que se puede resolver cualquier multiplicación utilizando solo sumas?

Analizando lo anterior, efectúe los siguientes ejercicios:

| | |
|---|---|
| 35 x 6 = | 23 x 10 |
| 35 x 10 | 36 x 25 |
| 46 x 50 | 456 x 100 |

Guía trabajo N. 2

Nombre:________________________________________ Sección:_________

Utilizando el siguiente modelo en la multiplicación:

1. Efectúe la siguiente multiplicación 12 x 15

Modelo a utilizar:

El 15 se puede descomponer así: 10 + 5, observa y contesta las siguientes preguntas:

a) Si efectúas la multiplicación por separado, es decir, 12 x 10 y 12 x 5 y sumas esos resultados, ¿obtienes la misma respuesta anterior?

b) ¿Crees que se puede resolver cualquier multiplicación utilizando este modelo?

Analizando lo anterior, efectúe los siguientes ejercicios:

234 x 24

435 x 57

546 x 123

768 x 305

744 x 403

654 x 505

Guía trabajo N. 3

Nombre:________________________________________ Sección:_________

Utilizando el siguiente modelo en la división:

1. Efectúe la siguiente división $35 \div 6$ y encuentre el cociente y el residuo.

Modelo a utilizar:

Si al 35 le restas varias veces el 6, hasta cuando ya no se pueda, observa y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relación existe entre el cociente y la cantidad de veces que se restó el 6?

b) ¿Qué relación existe entre lo que sobró en la resta con el residuo de la división?

c) ¿Se puede efectuar una división solamente restando?

Analizando lo anterior, efectúe los siguientes ejercicios:

$78 \div 9$ $345 \div 76$

$845 \div 123$ $1234 \div 212$

Guía trabajo N. 4

Nombre:________________________________________ Sección:_________

Utilizando el siguiente modelo en la división:

1. Efectúe la siguiente división $35 \div 6$ y encuentre el cociente y el residuo.

Modelo a utilizar:

Sume el 6 varias veces hasta acercarse a 35, observa y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relación existe entre el cociente y la cantidad de veces que se sumó el 6 consigo mismo?

b) De acuerdo al residuo de la división efectuaste, ¿Como podrías encontrar el residuo en este modelo?

c) ¿Se puede efectuar una división utilizando solamente la suma?

Efectúe usando el modelo anterior:

$78 \div 9$ $345 \div 76$

$845 \div 123$ $1234 \div 212$

Guía trabajo N. 5

Nombre:________________________________________ Sección:_________

Utilizando el siguiente modelo en la división:

1. Efectúe la siguiente división $35 \div 6$ y encuentre el cociente y el residuo.

Modelo a utilizar:

Elabore la tabla del 6 y observa el número que multiplicado por 6 da cerca de 35, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relación existe entre el cociente y ese número que multiplicado por 6 está cerca de 35?

b) ¿Cómo se encontraría el residuo en este caso?

c) ¿Se puede efectuar una división utilizando las tablas de multiplicar?

Analizando lo anterior, efectúe los siguientes ejercicios:

$78 \div 9$ $345 \div 76$

$845 \div 123$ $1234 \div 212$

Guía trabajo N. 6

Nombre:________________________________________ Sección:_________

Utilizando el siguiente modelo en la división:

1. Efectúe la siguiente división $135 \div 25$ y encuentre el cociente y el residuo.

Modelo a utilizar:

El 135 se puede descomponer así: 100 + 30 + 5, realiza las siguientes divisiones parciales:

a) $100 \div 25$

b) $35 \div 25$

c) $5 \div 25$

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relación existe entre el cociente de la división original y la suma de los cocientes de las otras tres divisiones?

b) ¿Qué relación existe entre el residuo original y la suma de los residuos restantes?

c) Si la suma de los residuos restantes es más grande que el divisor, ¿ qué se puede hacer?

d) ¡Crees que se pueda aplicar este modelo a todas las divisiones?

Analizando lo anterior, efectúe los siguientes ejercicios:

$78 \div 9$ $345 \div 76$

$845 \div 123$ $1234 \div 212$

ANEXO 4

EVALUACIÓN FINAL

INSTITUTO DEPARTAMENTAL “JOSE TRINIDAD REYES PRIMER CURSO

EXAMEN DE MATEMÁTICAS PRIMER PARCIAL

NOMBRE:________________________________________ SECCIÓN :_________

TIPO SELECCIÓN ÚNICA:

Instrucciones : Encierre en un círculo la respuesta correcta. Valor 3% c/u

1. En la siguiente multiplicación: 1 2 8 x 3 4 7 al multiplicar el 4 por el 2 el valor real es:

a) 8 b) 800 c) 80 d) 8,000

2. En la siguiente multiplicación:

```
   3 4 5  x 2 6 8
  ________________
   2 7 6 0    primera fila
 2 0 7 0      segunda fila
 6 9 0        tercera fila
_______________
 9 2 4 6 0
```

el valor real de la segunda fila es :

a) 2,070 b) 207,000 c) 20,700 d) 2,070,000

3) Cuántas veces cabe 30 en 370:

a) 340 b) 11100 d) 12 d ) 10

TIPO CONOCIMIENTO

Coloque una X en la línea de si considera que la respuesta es correcta ó una X en NO si considera que es incorrecta.

1) Se puede efectuar una división utilizando la resta:

SI ________ NO ______

2) Se puede efectuar una división utilizando la suma:

SI ________ NO ______

TRABAJO PRÁCTICO:

Trabaje de manera clara y ordenada:

1) Efectúe la siguiente división utilizando la operación resta:

$2678 \div 378$

2) Efectúe la siguiente división utilizando la operación suma:

$678 \div 71$

3) Efectúe la siguiente división utilizando la operación multiplicación:

$1658 \div 87$

4) Efectúe la siguiente división utilizando la descomposición del dividendo:

$1367 \div 54$

5) Al efectuar la siguiente multiplicación 235 x 76 me dio como resultado 17860, compruebe ese resultado:

6) Efectúa las siguientes multiplicaciones:

a ) 789 x 503 b) 276 x 409

7) efectúa las siguientes divisiones:

a) $34,381 \div 54$

b) $8,493 \div 5$

ANEXO 5

TABLAS

**Tabla nº 18**

| Ejercicios resueltos | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|---|
| No entregaron | 6 | 4 | 11 | 21 | 18% |
| 0 | 2 | 0 | 1 | 3 | 2% |
| 1 | 3 | 0 | 1 | 4 | 3% |
| 2 | 1 | 0 | 3 | 4 | 3% |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 7 | 6% |
| **4** | **2** | **8** | **12** | **22** | **18%** |
| **5** | **11** | **13** | **7** | **31** | **27%** |
| **6** | **13** | **10** | **6** | **28** | **23%** |
| **Total** | **40** | **38** | **43** | **121** | **100** |

**.** Cantidad de ejercicios resueltos por los alumnos del experimento al modelo de las sumas sucesivas.

**Tabla n. 20.**

| Nota que obtuvieron | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|---|
| No entregaron | 8 | 11 | 3 | 22 | 18% |
| 0 | 9 | 3 | 2 | 14 | 12% |
| 1 | 0 | 4 | 3 | 7 | 6% |
| 2 | 4 | 4 | 3 | 11 | 9% |
| 3 | 4 | 2 | 7 | 13 | 10.5% |
| **4** | **3** | **1** | **7** | **11** | **9%** |
| **5** | **4** | **3** | **6** | **13** | **10.5%** |
| **6** | **8** | **10** | **12** | **30** | **25%** |
| Total | 40 | 38 | 43 | 121 | 100 |

Cantidad de ejercicios resueltos por los alumnos del experimento al modelo de la propiedad distributiva.

**Tabla nº 22.**

| Nota que obtuvieron | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|---|
| No entregaron | 3 | 6 | 18 | 27 | 22% |
| 0 | 2 | 6 | 4 | 12 | 10% |
| 1 | 7 | 2 | 5 | 14 | 11.5% |
| 2 | 7 | 4 | 3 | 14 | 11.5% |
| **3** | **9** | **7** | **1** | **17** | **14%** |
| **4** | **12** | **13** | **12** | **37** | **31%** |
| Total | 40 | 38 | 43 | 121 | 100 |

Cantidad de ejercicios resueltos por los alumnos del experimento al modelo de la solución de una división por medio de la resta.

**Tabla nº 24.**

| Nota que obtuvieron | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|---|
| No entregaron | 6 | 6 | 17 | 29 | 24% |
| 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 3% |
| 1 | 2 | 2 | 3 | 7 | 6% |
| 2 | 5 | 3 | 2 | 10 | 8% |
| **3** | **6** | **6** | **5** | **17** | **14%** |
| **4** | **21** | **19** | **14** | **54** | **45%** |
| Total | 40 | 38 | 43 | 121 | 100 |

Cantidad de ejercicios resueltos por los alumnos del experimento al modelo de la solución de una división por medio de sumas sucesivas.

**Tabla nº 26.**

| Nota que obtuvieron | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|---|
| No entregaron | 7 | 8 | 28 | 43 | 36% |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 3% |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 3 | 2% |
| 2 | 5 | 1 | 0 | 6 | 5% |
| **3** | **5** | **5** | **3** | **13** | **11%** |
| **4** | **21** | **21** | **10** | **52** | **43%** |
| Total | 40 | 38 | 43 | 121 | 100 |

Cantidad de ejercicios resueltos por los alumnos del experimento al modelo de la solución de una división por medio de la multiplicación.

**Tabla n. 28.**

| Nota que obtuvieron | Sección 6 | Sección 10 | Sección 27 | Total | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|---|
| No entregaron | 18 | 8 | 28 | 54 | 45% |
| 0 | 3 | 2 | 5 | 10 | 8% |
| 1 | 4 | 9 | 3 | 16 | 13% |
| 2 | 7 | 4 | 2 | 13 | 11% |
| **3** | **5** | **5** | **2** | **12** | **10%** |
| **4** | **3** | **10** | **3** | **16** | **13%** |
| Total | 40 | 38 | 43 | 121 | 100 |

Cantidad de ejercicios resueltos por los alumnos del experimento al modelo de la solución de una división por medio de la propiedad distributiva.