UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

DIRECCIÓN DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA



CONSTRUCCION DEL CONCEPTO ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES MEDIANTE VISUALIZACIÓN Y REGISTROS DE REPRESENTACIÓN EN ALUMNOS DE PRIMER SEMESTRE DE INGENIERIA AGROINDUSTRIAL: SECUENCIA DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA.

Tesista

Ing. CARLOS RENÉ MARROQUÍN ALVARADO

Asesor de Tesis:

Dr. FERNANDO HITT ESPINOZA

T E G U C I G A L P A, M. D. C. Mayo de 2009 .

INTRODUCCIÓN

La idea central de este proyecto de investigación es poner en perspectiva una alternativa que proporcione de manera sencilla, una secuencia de situaciones concebidas en clase de manera ordenada, de operaciones organizadas en forma sistemática, de combinación de relaciones y de una estructuración que articule en el tiempo a todas las anteriores, con el fin de dar una respuesta de cómo podemos mediante la manipulación de los objetos matemáticos comprender y construir el concepto de ecuaciones lineales en dos variables.

Es lógico que cuando abordamos un tópico de "matemáticas" en un contexto generalizado, el educando presenta cierta resistencia a los contenidos del tema en cuestión, debido quizá, al trauma que viene arrastrando en su formación académica, es por lo anterior que la investigación gira en torno a dos grandes ejes, siendo uno de ellos el desarrollo del comportamiento matemático y el otro eje es el comportamiento cognitivo, de manera tal que se puede aprender las ecuaciones lineales en dos variables, como un tema inicial para el aprendizaje *a posteriori* de las funciones lineales y funciones en general.

Este proyecto de investigación se sustenta en observaciones e investigaciones que se han realizado en torno a las ecuaciones lineales y que sirven de base para la realización del análisis preliminar, mismo que es el pilar fundamental, para lograr los objetivos de este estudio.

Los objetos matemáticos son accesibles solamente a través de sus diferentes representaciones. Por tal motivo, la construcción conceptual de un objeto matemático requiere de la articulación de representaciones. Ello implica realizar procesos de conversión y tratamiento de las diferentes representaciones del objeto en cuestión. Desde este punto de vista, el trabajo de Duval y su definición de registro de representaciones (1993, 1995) nos proporcionan el marco teórico adecuado para la construcción en los estudiantes del concepto de ecuaciones lineales en dos variables.

Para cumplir esta tarea se diseñó una secuencia de actividades, donde el ambiente de aprendizaje fuese diferente al sistema de enseñanza tradicional, dándole un enfoque de carácter a-didáctico[1,] donde el maestro en lugar de trasmitir sus conocimientos plantee problemas mediante una secuencia de actividades de manera tal, que la misma le proporcione la ayuda necesaria al alumno y pueda de esta manera construir el concepto de ecuaciones lineales con dos variables, en base a lo anterior es que se ha estructurado la investigación en cinco capítulos.

Capítulo 1: Se expone el contexto del problema de estudio, justificando el porqué de la importancia de abordar dicho tema, como también el propósito que se quiere lograr con el diseño de la secuencia didáctica, para darle respuesta a las preguntas de investigación.

Capítulo 2: El marco teórico presenta los fundamentos que estructuran el tema de investigación, tanto en observaciones, investigaciones, como también teorías que giran en torno al mismo, citando el desarrollo histórico de la evolución de las ecuaciones lineales, y poniéndolas en perspectiva con las investigaciones que se están desarrollando en la actualidad.

Capítulo 3: En el diseño metodológico se hace una descripción de aspectos de carácter metodológico del trabajo de investigación, detallando en primer lugar el tipo investigación, de los participantes involucrados en la secuencia de actividades, así como los métodos y técnicas, incluyendo la explicación del desarrollo de las actividades para la construcción del concepto de ecuaciones lineales, haciendo énfasis en el análisis de los datos presentados tanto en la prueba diagnóstica, como de la tareas de la secuencia.

Capítulo 4: La presentación y análisis de resultados se desarrolló en dos etapas, en la primera etapa los datos recolectados mediante una prueba diagnóstica nos proporcionaron evidencia de la noción que los alumnos de Ingeniería Agroindustrial tienen del concepto de ecuaciones lineales, como también las estrategias a las que ellos recurrieron cuando se enfrentaron a una situación a-didáctica, y en función de ésta, se

1 Proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos y, que le permitirán generar además hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica.

diseñó la segunda etapa de actividades, cuyo desarrollo orientara a los alumnos para que pudieran realizar actividades matemáticas como también actividades cognoscitivas.

Capitulo 5: En las conclusiones y recomendaciones se da una interpretación de los resultados obtenidos por la investigación, mismos que articulan con los objetivos propuestos como también del contexto en que se desarrolló la secuencia, en correspondencia con el marco de referencia y del enfoque de respuestas a las preguntas de investigación. Aportando algunas ideas que de manera alguna mejoren la instrucción en las aulas de clases, con la aplicación de los conceptos de visualización y registros de representación semiótica, como también la implementación del uso de tecnología.

El trabajo de investigación finaliza con el conjunto de referencias bibliográficas utilizadas en el desarrollo de la investigación, acompañado con el anexo de la secuencia de enseñanza misma que puede ser retomada para hacerle mejoras de manera que se expongan otras ideas que faciliten una comprensión del concepto de ecuaciones lineales.

CAPITULO 1

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACION

1.1 Contexto del Problema

El tema de las ecuaciones lineales con dos variables se enseña en el nivel secundario, como un requisito de su enseñanza en el proceso de formación continua, en el nivel superior, en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras, específicamente en el Centro Universitario Regional Nororiental (C U R N O), se imparte a los alumnos que están estudiando la carrera de Ingeniería Agroindustrial, la asignatura de Matemática I (MM-110), la cual forma parte del pensum académico, y en el cual se desarrolla el tema de estudio de esta investigación.

El interés por desarrollar la investigación de esta problemática en particular, como lo es, las ecuaciones lineales con dos variables, surge en dos aspectos, en primer lugar se debe al aspecto personal pero de carácter no subjetivo, y en segundo lugar por la forma colectiva que se aborda el tema en cuestión, en relación a las interrogantes que los docentes y la comunidad universitaria se hace por mejorar la instrucción matemática.

Las experiencias en los salones de clase y algunos diagnósticos que se realizan en el centro universitario, reflejan la falta de comprensión por parte del alumnado en relación a los contenidos de matemática, en este sentido dar una respuesta satisfactoria a este problema estaría fuera de contexto inmediato, pero sí debemos enfocarnos en algunas características como ser el bajo nivel de comprensión de la instrucción matemática y por otro lado su actitud por mejorar el conocimiento matemático. Lo anterior conduce a la importancia de hacer cambios en los proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, de manera que este proceso refleje en el alumno la capacidad de construir sus conceptos.

Es evidente que tenemos ante nosotros un problema, en función de las observaciones que muestran el grado de dificultad que presenta para el estudiante de Ingeniería Agroindustrial el aprendizaje de las ecuaciones lineales con dos variables, como un problema a futuro para entender el concepto de función, dificultad que el estudiante supere con la coordinación de diferentes registros de representación semiótica.

En la enseñanza tradicional, son numerosos los errores recurrentes que cometen los alumnos, que escapan a los esfuerzos de los profesores por evitarlos y corregirlos; por ejemplo, los alumnos presentan dificultades concernientes a la utilización de operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones aun cuando saben aplicar perfectamente los algoritmos de resolución, presentándose estas dificultades en la introducción de una escritura literal para valores numéricos y en los comienzos del álgebra (Igualdades y Desigualdades). Guzmán (2000).

Si se aborda el concepto de ecuaciones lineales con dos variables en particular, ya que es el tema de estudio de esta investigación y que le llamamos objeto, se enseña a nivel secundario, por lo que no debería presentar ningún obstáculo cognitivo en nivel superior.

Existe un grupo muy pequeño de estudiantes que logran mediante el manejo del álgebra y la aritmética, desarrollar un algoritmo que proporcione una solución al problema, mediante la enseñanza tradicional, sin embargo el problema es notorio para el resto del grupo de alumnos que no logran comprender la instrucción matemática, ya que los mismos presentan evidencia de obstáculos y malformaciones en sus conceptos, lo cual impide el desarrollo de la habilidad de visualizar y de representar los objetos matemáticos en sus diferentes registros, en consecuencia el estudiante no logrará una construcción adecuada del concepto de las ecuaciones lineales.

Cantoral y Montiel (2001), sostienen y en relación al párrafo anterior que "…De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales, digamos que se requiere del ámbito de lo gestual…" (pág. 694).

De acuerdo a la postura de Cantoral y Montiel (Idem), para que el estudiante pueda construir el concepto de un objeto matemático, debe tener nociones básicas del concepto, de manera que le permita sin contradicciones visualizar una o varias

representaciones, el problema surge cuando se desarrolla un tema específico, para el caso de ecuaciones lineales con dos variables, pareciera que el tema expuesto se manifiesta de forma vaga para el estudiante o que es una temática nueva, dando de que el estudiante presenta una ruptura conceptual al pasar del nivel secundario al nivel superior.

Las ecuaciones lineales con dos variables *a posteriori* es un obstáculo para el aprendizaje de temas que articular con dicho concepto, el alumno no solo debe tener nociones de este tema, sino también habilidades de manipulación de las ecuaciones en general, de forma que su desarrollo mental lo centre para construir otros conceptos que requieren de habilidades aritméticas, algebraicas, y de construcción de gráficas en forma integrada.

El propósito principal de la enseñanza de las ecuaciones lineales con dos variables es que los estudiantes, sean capaces de distinguir entre sus diferentes usos y los puedan aplicar en materias donde el objeto es un subtema para el desarrollo de otros temas, como ser las funciones afín, límites, derivadas, continuidad, entre otros.

En esta investigación las actividades realizadas tienen el objetivo de enfatizar el trabajo en grupo, la comunicación y aplicaciones del mundo real, de manera que los estudiantes encuentren en las mismas una forma interesante que refleja la manera en que las matemáticas son utilizadas y por otro lado, se les proporciona oportunidades para escribir sobre el pensamiento matemático, para reflexionar sobre las actividades y para hacer presentaciones orales a sus compañeros de clase acerca de su trabajo, lo que les permite adquirir madurez matemática durante el desarrolla de la secuencia y de manera concluyente realizar la construcción del concepto de ecuaciones lineales.

Así, la investigación se propone mediante la secuencia sistemática de actividades hacer una diferencia entre las formas de representar los objetos matemáticos, en este caso en particular nos referimos a ecuaciones lineales con dos variables, también la explicación de sus transformaciones mediante el **tratamiento** y **conversión** de los diferentes

registros de representación semiótica, así mismo, recurrir al proceso de visualización como una herramienta significativa para el aprendizaje de las ecuaciones lineales.

Si el alumno logra adquirir la habilidad de resolución de problemas de ecuaciones lineales mediante visualización para realizar la conversión del registro gráfico al registro verbal y viceversa, al enfrentarse a una situación a-didáctica, podremos afirmar que su aprendizaje ha sido significativo y que da muestra de conocer el carácter funcional de las ecuaciones lineales, significando pues, la manipulación y transformación de representaciones visuales e imágenes visuales.

1.2 Justificación

Para el desarrollo de este proyecto de investigación, se identificó una serie de eventos, en relación a problemas de aprendizaje en los alumnos de primer semestre de Ingeniería Agroindustrial, los cuales involucran a las ecuaciones lineales con dos variables, por lo que nos planteamos bajo este contexto dar respuesta a dicho evento.

Por lo anterior debemos hacernos la siguiente interrogante ¿Es posible darnos cuenta hacia donde nos conduce los resultados de este estudio?, pero más allá de una propuesta en base a las experiencias subjetivas nos planteamos una alternativa que proporcione respuestas mediante una secuencia de enseñanza del objeto matemático, promoviendo en los estudiante habilidades para la manipulación y transformación de representaciones visuales.

Duval (1999, pág.20) expresa que la experiencia que se obtiene en clase en forma permanente, pone de manifiesto el problema global, que enfrentan los estudiantes en la resolución de problemas en matemáticas, es decir sus procedimientos espontáneos, sus errores o incomprensiones persistentes; no basta mirar solamente las exigencias propias a las Demarches[2] matemáticas de solución ni, incluso, las restricciones de las secuenciación curricular que dominan la adquisición de los conocimientos matemáticos.

2 Duval lo usa con mucha frecuencia para designar todo lo que alguien hace para llegar a un resultado, incluidas todas las tentativas y las falsas pistas abandonadas.

De acuerdo a la postura de Duval (Idem) y de otros investigadores, que sustentan el marco teórico de esta investigación, en relación al tema de las ecuaciones lineales con dos variables, quizá dan respuesta a la interrogante del por qué el tema en cuestión es motivo de investigación en la actualidad, lógicamente se debe reflexionar al respecto desde un punto de vista social el cual involucra al docente, alumnos y la sociedad misma, ya que existe la responsabilidad del docente de educar a todo ser humano que accede a la educación, que mas allá de cubrir los contenidos curriculares se debe dar una educación de calidad.

Las exigencias de la sociedad en cuanto a educación de calidad es evidente, ya que los fenómenos de la globalización exigen cambios en la búsqueda de actividades competentes que involucran a la sociedad misma, como también al sistema educativo el cual debe evolucionar y dar respuesta mediante estrategias que permitan articular a ambas. Esto permite darle una mayor atención a los contenidos curriculares y procesos de enseñanza y aprendizaje, tal es el caso los obstáculos que presentan el estudiante en la resolución de problemas que conciernen a las ecuaciones lineales con dos variables.

Actualmente se plantean los problemas sobre ecuaciones lineales en dos variables fuera de contexto, ello promueve que el estudiante vea en esos problemas una representación como un objeto sin sentido con un contenido numérico, además del concepto de variable como las incógnitas del problema a resolver, y a las que se les debe asignar valores numéricos representativos que en la mayoría de los casos no presentan una selección lógica. Es necesario que el alumno desarrolle su pensamiento matemático, con el objetivo de que domine y visualice el objeto no solamente desde el punto de vista algebraico, sino también que pueda articular ese mismo objeto desde una perspectiva gráfica y verbal en otros casos.

Es evidente que las ecuaciones lineales con dos variables representan *a priori* un problema para entender y dominar el concepto de función, que es ampliamente utilizado para el aprendizaje del cálculo. Lo anterior se debe a que el alumno resuelve sistemas de ecuaciones o ecuaciones lineales con dos variables y no verifica que la solución hallada

sea del sistema, es decir hay una desarticulación entre el objeto ecuaciones lineales con dos variables y su soluciones.

Al respecto de los problemas que presentan los alumnos en la resolución de problemas, quizá se deben en parte a la pérdida de habilidades aritméticas y como lo manifiesta Hitt (2000): "…La prioridad que se le otorga al desarrollo de un pensamiento algebraico sobre el aritmético en la enseñanza media básica, provoca en cierta medida la perdida de habilidades aritméticas" (pág. 80)

Al respecto Hitt plantea un ejercicio para evidenciar el párrafo anterior: En un aula hay 28 alumnos y la razón de niños a niñas es de 4: 3 ¿Cuántas niñas hay en el aula?

Observando el orden que se dio en la información, si la razón es de 4: 3, ello quiere decir que por cada cuatro niños hay 3 niñas (ver cuadro 1).

Resolución aritmética	Resolución algebraica
Construyamos una tabla que nos permita visualizar el hecho de que por cada 4 niños, debemos contar con tres niñas, al llegar a 28 nos detenemos, Total 7 14 21 28 Niños 4 8 12 16 Niñas 3 6 9 12 ← Respuesta Por lo tanto, la respuesta es de 12 niñas en esa aula.	Supongamos que ***x*** representa el número desconocido de niños; ***y*** el número de niñas que también es desconocido. Sabemos que hay un total de 28 alumnos, o sea que $x + y = 28$. También sabemos que la relación de niños ***x*** y niñas ***y*** es 4: 3. Es decir, $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$. De esta segunda ecuación podemos aislar a ***x***. multiplicamos ambos lados de la ecuación para no alterar la igualdad por ***y*** (número de niñas). Obtenemos $\frac{x}{y} \cdot y = \frac{4}{3} \cdot y$, que al simplificar se tiene $x = \frac{4}{3} \cdot y$. podemos sustituir este valor desconocido de ***x*** en la primera ecuación. De donde resulta, $\frac{4}{3} \cdot y + y = 28$; simplificando, $y = 12$.

CUADRO 1

Continúa Hitt, ¿Cuál procedimiento es el más adecuado? Posiblemente al profesor de enseñanza media básica le gustará más, el desarrollo algebraico que el aritmético.

Sin embargo, lo anterior quizá se deba a que el profesor encuentre mayor seguridad en el desarrollo algorítmico ya que es más avanzado, sin darse cuenta en la simplicidad y claridad de un proceso visual. Sin pretender restarle importancia al proceso algorítmico, sino más bien poner en evidencia el desarrollo mental y visual en el alumno en base a la resolución potencial del álgebra. Lo mejor sería que el profesor solicite al alumno resolver el problema bajo los dos aspectos: aritmético y algebraico, con ello podría evitar el obstáculo que podría presentársele al alumno al no poder avanzar en los procesos algebraicos y el de olvidar los procesos aritméticos.

Además, que si el alumno comete un error de corte algebraico con su proceso aritmético, éste cuenta con un elemento que le permite dudar de su proceso algebraico para tratar de encontrar el error por sí mismo y no porque el profesor se lo haya señalado.

Debemos pues, plantearnos algunas preguntas que vinculen a los alumnos en su desarrollo mental y de representación, con el objetivo de que el aprendizaje de las matemáticas se le facilite.

¿Qué importancia tienen para los estudiantes las diferentes representaciones en la adquisición del concepto de ecuaciones lineales en dos variables?

¿Podrían los alumnos lograr el análisis de reglas de correspondencia para establecer el pasaje del registro gráfico al registro algebraico?

¿Las diferentes representaciones del concepto de ecuaciones lineales en dos variables representan un obstáculo de comprensión para el alumno?

¿Qué propuestas de enseñanza son posibles para que el alumno sobrepase el obstáculo cognitivo?

¿Cómo motivar al alumno para que se responsabilice con respecto a los procesos de aprendizaje?

En concreto y en base a lo anterior los contenidos en matemáticas son variados, como también es variada su comprensión, pero, como la historia de las matemáticas lo ha mostrado, no se estudian los números racionales antes que los enteros positivos; y no se estudia algebra antes de tener conocimientos de aritmética, y en particular no estudiamos el concepto de función, si no desarrollamos habilidades de las ecuaciones en general y en particular las ecuaciones lineales con dos variables.

1.3 Propósito de la Investigación

Allan H. Schoenfeld en su artículo "Propósito y métodos de investigación en educación matemática" (2000), expresa que la investigación en educación matemática tiene dos propósitos principales:

- El puro (Ciencia básica): Comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje.
- Aplicada (Ingeniería): Usar esa comprensión para mejorar la instrucción matemática.

Ambos propósitos están profundamente relacionados, siendo el primero al menos tan importante como el segundo, la razón es simple; sin una profunda comprensión del pensamiento, la enseñanza y el aprendizaje, no es posible ningún progreso consistente en mejorar la instrucción matemática en los salones de clase.

En base a la postura de Allan H. Schoenfeld, el objetivo de este proyecto de investigación está orientado hacia la segunda parte de lo que Schoenfeld señala, es decir, a lograr que el estudiante visualice y desarrolle su pensamiento matemático y de esa manera, construya el concepto, con el fin de usar esta herramienta para mejorar sus habilidades matemáticas, por lo que, intentaremos promover en el estudiante la

articulación entre representaciones de diferentes registros mediante el tratamiento y conversión.

1.4 Objetivo General

El estudio de esta investigación es explorar acerca de la concepción, comprensión y la habilidad matemática que los estudiantes de Ingeniería Agroindustrial, tienen de la noción del concepto de ecuaciones lineales en dos variables, apoyados en los procesos de visualización y de registros de representación del objeto en cuestión.

1.5 Objetivos Específicos:

- Conocer sobre las concepciones de los estudiantes de Matemáticas I, en torno a las ecuaciones lineales en dos variables.
- Que el estudiante de Matemáticas I realice trasformaciones entre registros de representación en torno al concepto de ecuaciones lineales en dos variables.
- Describir las dificultades que los estudiantes de matemática I, tienen al representar el objeto matemático en un registro gráfico.

1.6 Preguntas de la Investigación:

- **¿**Qué representaciones utilizan los estudiantes al enfrentarse a una situación didáctica que requiere del uso de procesos de conversión entre algunos de los registros de representación de las ecuaciones lineales con dos variables?

- ¿Qué estrategias realizan los estudiantes al enfrentarse a una situación didáctica que requiere del uso de procesos de conversión entre algunos de los registros de representación de las ecuaciones lineales con dos variables?

- ¿Qué errores cometen los estudiantes cuando son confrontados con tareas relativas al concepto de ecuaciones lineales con dos variables?

- ¿De qué manera el alumno realiza las tareas de conversión entre registros?

- ¿Cuál de estas tareas presenta mayor complejidad al estudiante?

- ¿Qué habilidades ha desarrollado el alumno con respecto a los procesos de visualización matemática?

CAPITULO 2

MARCO TEORICO

2.1 Marco Teórico

Es del conocimiento de todo ser humano que ha tenido contacto con el aprendizaje de la matemática, tanto para transmitir como para recibir conocimientos matemáticos, que es un proceso complejo; porque ello implica desarrollar la habilidad del pensamiento cognitivo, lo que conduce a centrar la investigación en este caso en particular, a la construcción del concepto de las ecuaciones lineales con dos variables.

La idea de esta investigación es diseñar una secuencia que le facilite al alumno el aprendizaje del concepto de ecuaciones lineales con dos variables, apoyado en los procesos del tratamiento al interior de un registro y conversión de al menos dos registros de representaciones semióticas.

Iniciamos con algunos conceptos y terminología que estructuren nuestra investigación desde una perspectiva teórica, sustentada en los trabajos de Guy Brousseau con la teoría de situaciones; Raymond Duval bajo la teoría de registros de representación semiótica y Fernando Hitt en procesos de visualización.

2.2 Historia de las Ecuaciones Lineales

La información que a continuación se proporciona fue tomada desde una fuente de internet (http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.htm). La primera fase que comprende el periodo de 1700 a. de C. a 1700 d. de C., se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Dentro de esta fase encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a. de C.), llamada *álgebra geométrica*, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a Viète (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define

como la teoría de los “cálculos con cantidades de distintas clases” (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones, para llegar al actual proceso de resolución de la ecuación $ax + b = c$ han pasado más de 3.000 años.

Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhid 1650 a. de C y el de Moscú 1850 a de C.) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refiere a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones. Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$$x + ax = b$$
$$x + ax + bx = 0$$

Donde *a*, *b* y *c* eran números conocidos y ***x*** la incógnita que ellos denominaban aha o montón.

Una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhid responde al problema siguiente:

“Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24”.

En notación moderna, la ecuación sería: $x + \frac{1}{7}x = 24$

La solución la obtenía por un método que hoy conocemos con el nombre de “*método de la falsa posición*” o “*regula falsi*”. Consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución, sino mediante cálculos obtendremos la solución exacta.

Supongamos que fuera 7 la solución:

Al sustituir en la ***x*** nos daría: $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$ y, como nuestra solución es 24, es decir $8 \cdot 3$, la solución es $21 = 7 \cdot 3$, ya que $3.\left(7 + \frac{1}{7} \cdot 7\right) = 24$

Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil como en este caso e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias (fracciones con numerador la unidad) cuyo uso dominaban los egipcios.

En cuanto el simbolismo, solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta respectivamente.

Los babilonios (el mayor número de documentos corresponde al periodo 600 a. de C. a 300 d. de C.) casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizá por considerarlas demasiado elementales y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado.

Entre las pocas que aparecen, tenemos la ecuación $5x = 8$. En las tablas en base sexagesimal hallaban el recíproco de cinco que era $\frac{12}{60}$ y en la tabla de multiplicar por 8, encontramos $8 \cdot \frac{12}{60} = 1\ \frac{36}{60}$.

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (250 d. de C.) no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación como hemos visto era mayor por la geometría. Sobre la vida de Diophante aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal y dice:

> *"Transeúnte, esta es la tumba de Diophante: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupo su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aun una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció*

de una muerte desagraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años. De todo esto, deduce su edad."

Los primeros documentos matemáticos que existen (datan del siglo III d. de C.) son los *Sulvasütras*, donde se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos. En éstos aparece el siguiente problema:

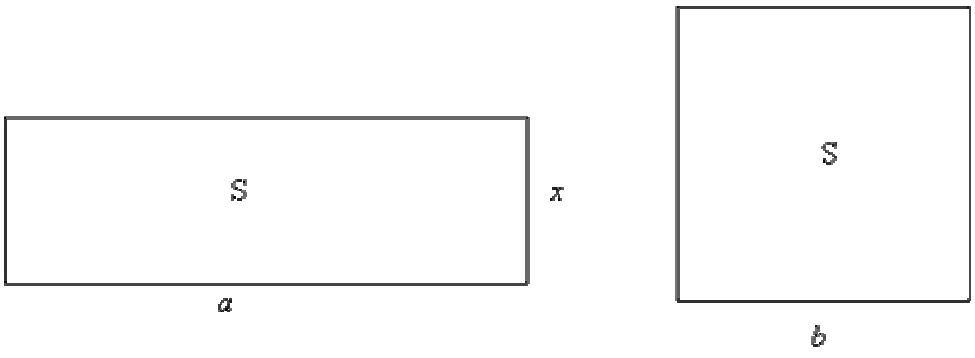
"Hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de su cuadrado"

Esto es:

$$ax = S$$

Lo resolvían utilizando el método de la falsa posición, como los egıpcıos.
Posteriormente Brahmagupta (siglo VII) expresa, ya de forma sincopada, cómo resolver ecuaciones lineales, la incógnita la representaba por la abreviatura ***y a***, y las operaciones con la primera sílaba de las palabras.

Dada la ecuación $ax + b = cx + d$, la solución vendrá dada dividiendo la diferencia de los términos conocidos entre la diferencia de los coeficientes de los desconocidos, esto es



$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Estos métodos pasaron a los árabes que los extendieron por Europa. Al algebrista Abu-Kamil (siglo IX y X) se le atribuye una obra donde trata la solución de ecuaciones lineales por simple y doble falsa posición. El método de la doble falsa posición es el siguiente:

Sea la ecuación $ax + b = 0$ y supongamos dos valores para la ***x***:

$$\begin{aligned} x &= m \quad am + b = p \\ x &= n \quad an + b = q \end{aligned} \qquad (1)$$

Restando $a(m$

Por otra parte, eliminando ***a*** en (1).

$$amn + bn = pn$$

$$amn + bm = qm$$

Que restando $b(n \mid m) = pn - qm$

y dividiendo ambos resultados

$$-\frac{a}{b} = \frac{(p \mid q)}{(pn \mid qm)}$$

o también

$$-\frac{b}{a} = \frac{(pn \mid qm)}{(p \mid q)}$$

Siendo esto último el valor de ***x***.

Veamos un ejemplo:

Sea la ecuación $5x - 10 = 0$ si tomamos como valor de $x: x = 3$ y $x = 4$

y sustituyendo $5 \cdot 3 - 10 = q$

$5 \cdot 4 - 10 = p$

Se tiene que $x = \frac{(10 \cdot 3 - 5 \cdot 4)}{(10 - 5)} = \frac{(30 - 20)}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Este principio fue posteriormente presentado en una forma ligeramente modificada por el método de las escalas. El nombre proviene de un diagrama que permitía escribir la solución rápidamente:



Las dos líneas de la izquierda representan ***p*** y ***q*** y las de la derecha ***m*** y ***n*** y la cruz del centro indica que hay que multiplicar.

El método puede ser sintetizado como sigue:

1. Consideran dos valores cualesquiera de la incógnita ***m***, ***n***.
2. Calculan los errores correspondientes a ellos ***p***, ***q***.
3. Hallan el valor de la incógnita en función de los valores dados y sus errores.

Haciendo la sustitución de términos en el ejemplo anterior quedaría.



2.3 Historia de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como *longitud, anchura, área, o volumen,* sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$\frac{1}{4}$ Anchura + longitud = 7 manos

longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura = 20, longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación sería:

$$y + 4x = 28$$

$$y + x = 10$$

Restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$.

También resolvían sistemas de ecuaciones donde alguna de ellas era cuadrática.

Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de ***n*** ecuaciones con ***n*** incógnitas.

Diophante resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal.

Diophante, sólo aceptaba las soluciones positivas pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada como hemos señalado

anteriormente. Sin embargo, unas de las dificultades que se encuentra en la resolución de ecuaciones por Diophante es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos.

Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución sino, que resuelven tipos especiales de ecuaciones.

La historia nos muestra pues, que la construcción de los algoritmos ha privilegiado su desarrollo a lo largo del descubrimiento de los conceptos matemáticos manifestando pautas de lo que en la actualidad se practica en las aulas de clases en relación a los procesos de enseñanza-aprendizaje, esta actividad como una alternativa de resolución de problemas ha aportado de alguna manera el aprendizaje de las misma, pero que carecen de justificación por presentar métodos muy extensos en la resolución de las ecuaciones lineales que en la mayoría de los casos tienden a confundir al alumno.

Los estudiantes aprenden matemáticas solo cuando construyen activamente sus conceptos ellos mismos. En este sentido se debe articular los métodos de enseñanza actuales con las nuevas teorías que surgen como alternativas en la resolución de problemas de matemáticos, nos referimos pues, al concepto de visualización desarrolladas por Hitt (1997), Duval (1999), Zimmermann y Cunningham (1991), citados por Nolasco (2000), Cantoral y Montiel (2001), De Guzmán (1996), entre otros, como también la importancia que tienen las representaciones de los objetos matemáticos mediantes diferentes registros de representación semiótica, desarrolladas por Duval (1993, 1995) que expresen de manera sencilla y fácil la forma como se pueden mediante la aplicación del proceso visual manipular sus diferentes propiedades que se manifiestan en los objetos matemáticos y al tiempo que dan soporte al aprendizaje de los mismos.

2.4 Investigaciones en torno de Ecuaciones Lineales

El concepto de ecuaciones lineales en dos variables constituye una herramienta de estudio ampliamente utilizada en los salones de clase, desde los primeros años de

secundaria hasta finalizar el bachillerato, por lo que en la actualidad la misma es motivo de estudio de muchos investigadores tales como: Schoenfeld *et al*. (1993), Duval (1988), y Herscovics (1980) entre otros; citados por Hoyos (1998) en su artículo "Revisitando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas: observaciones empíricas con estudiantes de 16 – 18 años de edad".

En su reseña, Hoyos (Idem) pone de manifiesto el nivel de dificultad encontrado en la significación convencional de las ecuaciones lineales, aun para estudiantes que cursan los primeros años de bachillerato, entendiendo como significado a la ecuación de la forma $ax + by = c$, con *a*, *b* y *c* distintos de cero, en donde todos los pares de valores que la satisfacen son coordenadas de puntos de la recta y recíprocamente. A continuación Hoyos, reporta las observaciones realizadas por cada investigador:

- El estudio de Schoenfeld et al., (1993), LEARNING. The microgenetic analysis of one student's revolving understanding of a complex subjet matter domain, fue llevado a cabo en un medio ambiente de aprendizaje de las funciones mediante un paquete computacional con un software ("GRAPHER", disponible para Mackintosh II-Clásica) especialmente construido para tal efecto. Sin embargo, el tema matemático de interés en el estudio de Schoenfeld et al., fue el de la conversión entre las representaciones tabulares, gráficas y simbólicas de las funciones.

Hoyos (Idem), expresa que la idea de Schoenfeld *et al.,* (1993) con respecto a la dinámica de trabajo a seguir de Schoenfeld, era dejar a los jóvenes estudiantes experimentar (para permitirles descubrir el software por ellos mismos y ver que lo encontraban de interesante) mientras se trataba, tanto como fuera posible, de que expresaran en voz alta lo que pensaban del trabajo, con una intervención mínima de un instructor.

Finalmente comenta Hoyos (Idem) al respecto del estudio de Schoenfeld *et al*., lo que interesa señalar son las evidencias que aportan en cuanto a que, en general, las estructuras del conocimiento elaboradas de forma independientemente por los

estudiantes no coincide con las estructuras convencionales de la materia o del tema en estudio.

- Con respecto al artículo de Duval (1988) "Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros"; Hoyos (Idem) se centra en los resultados que se reportan con respecto a la ejecución de tareas de reconocimiento de vínculos entre los registros o formas gráficas y algebraicas, además del análisis formal que ahí se realiza de las variables que intervienen en los dos registros mencionados.

En su artículo, (Duval), él mismo exhibe un marco teórico semiótico para el análisis de las reglas de correspondencia entre el registro de las representaciones gráficas y el de la escritura algebraica y argumenta que: "… fundamentalmente la razón de las dificultades de lectura y de interpretación de las representaciones gráficas cartesianas es el desconocimiento de estas (de las reglas de correspondencia)." (Cf, Duval, 1988, pág. 125)

Lo anterior significa, como lo menciona Duval, que es necesario para el reconocimiento en cuestión, la intervención de una vía de ***interpretación global*** de las propiedades de las figuras mediante la cual se asociaría una ***variable visual*** de la representación como una ***unidad significativa*** de la escritura algebraica, es decir:

> *El conjunto trazo-ejes forma una imagen que representa un* ***objeto*** *descrito por una expresión algebraica. Toda modificación de esta imagen que extrañe una modificación en la escritura de la expresión algebraica correspondiente determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica. (Cf., Ídem, pág. 131)*

Duval se refiere a la expresión algebraica de la forma $y = ax + b$ que al experimentar una modificación lo que más importa en la misma, es el coeficiente *a* y la constante *b* y afirma que para las rectas no paralelas a los ejes hay solamente 18 representaciones gráficas que son distintas visualmente de manera significativa y para el caso del paralelismo a uno de los ejes hay desaparición de la variable que se refiere a este eje.

En cuanto a las variables visuales para el trazo de la recta y que sirven en la interpretación de la gráfica, Duval (1993, pág.182) muestra un cuadro donde presenta

las **variables visuales** tales como: sentido de inclinación (trazo subiendo o bajando), ángulos con los ejes y posición con el eje y. (ver cuadro 2) (citado por García, 2000).

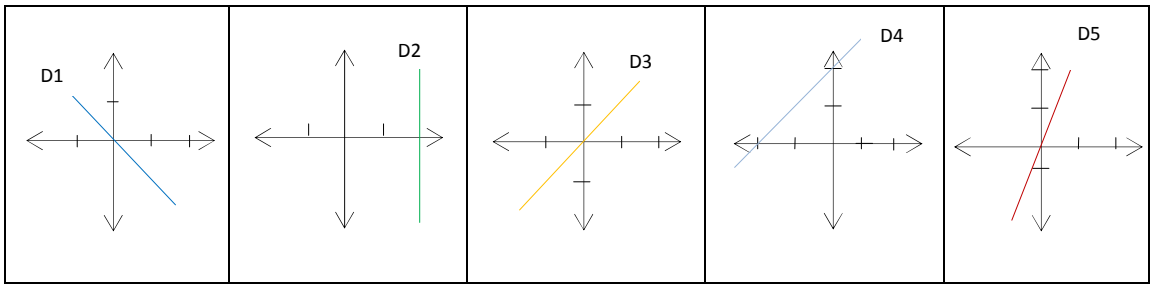
VARIABLES VISUALES			
Sentido de Inclinación	Angulo con los ejes	Posición con el eje y	Ejemplo de escritura
Trazo subiendo	Partición simétrica	Corte en el origen	$y = x$
		Corte por arriba	$y = x + 1$
		Corte por abajo	$y = x - 1$
	Angulo más grande	Corte en el origen	$y = 2x$
		Corte por arriba	$y = 2x + 1$
		Corte por abajo	$y = 2x - 1$
	Angulo más pequeño	Corte en el origen	$y = \frac{1}{2} x$
		Corte por arriba	$y = \frac{1}{2} x + 1$

		Corte por abajo	$y = \frac{1}{2}x - 1$
Trazo bajando	……..	……..	$y = -x$

CUADRO 2

Para aclarar lo que Duval menciona en relación a las formas gráficas y algebraicas, como también a las variables visuales, Hoyos (Idem) analiza un ejemplo propuesto por Duval, el cual se aplicó a tres grupos del primer trimestre del bachillerato y consiste en lo siguiente:

«Se designa por ***x*** la abscisa y por ***y*** la ordenada de un punto M del Plano de referencia. Indicar que expresiones algebraicas (E1, E2,…, E10) corresponde a cada una de las rectas D1, D2, D3,…, D5



E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
$y \geq x$	$y \leq x$	$y = x$	$y = -x$	$y = o$	$y= x+2$	$y= x- 2$	$y=2x$	$y \geq x+2$	$x = 2$

Los resultados obtenidos de la aplicación del test a los estudiantes del primer año del liceo francés, fueron los siguientes:

De un total de 105 alumnos:

75 asociaron correctamente $y = x$ con D3

59 asociaron correctamente $y = -x$ con D1

68 asociaron correctamente $x = 2$ con D2

26 asociaron correctamente $y = x + 2$ con D4

39 asociaron correctamente $y = 2x$ con D5

59 encontraron y discriminaron $y = x$ y $y = -x$

23 encontraron y discriminaron $y = 2x$ y $y = x + 2$

16 acertaron a los cinco ítems

14 fracasaron en los cinco ítems »

Nótese, que existen bajos porcentajes de éxito (entre 20 y el 30%) alcanzados por los estudiantes en la tarea de reconocimiento entre expresiones algebraicas y gráficas en donde la recta no pasa por el origen, (pág. 346 – 345).

- En cuanto al experimento de enseñanza de Herscovics (1980), Hoyos (Idem), se refiere a los resultados de este artículos, en los cuales se hace referencia al contenido- aprendizaje y enseñanza del tema de las ecuaciones de la recta, y a la forma de abordar su estudio mediante la observación clínica de los efectos de una instrucción tendiente a la construcción de significados de las nociones en juego.

El objetivo de Herscovics en su trabajo fue el de elaborar una guía pedagógica para la enseñanza de la recta y de su ecuación, basándose en una investigación sobre la construcción del significado para las ecuaciones lineales por alumnos de 15 años, apoyándose sobre concepciones intuitivas y operacionales de las nociones geométricas.

Hoyos (Idem), continúa refiriéndose, con respecto al trabajo de Herscovics, en donde sus experimentos se instrumentan alternativas didácticas para la construcción de la noción de línea recta:

> La primera llamada "intuitiva", está basada sobre un patrón de reconocimiento y ensayo, mientras que la segunda construcción es

> llamada "relacional" dado que está basada en la relación del concepto de pendiente con el de dirección (Herscovics, pág. 362).

En sus conclusiones, se reportan grados importantes de dificultad en torno de la significación de las ecuaciones en las investigaciones antecedentes, las cuales proporcionan indicios de un corte didáctico (cf. Hoyos, 1995) ahí existente, y sugiere que tal vez el problema de producción de una ecuación lineal a partir de su imagen gráfica sea un lugar adecuado de observación entre tipos distintos de pensamiento algebraico.

Para el caso García (2000) en su antología " Conversión entre representaciones gráficas y algebraicas del concepto de recta'' se refiere en su resumen, a que existen muchas investigaciones relacionadas con la conversión entre representaciones gráficas, numéricas y algebraicas de un concepto matemático, al respecto, García cita a Hitt (1997) donde señala que la preocupación existente entre los matemáticos y profesores de matemáticas, porque los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones ha desfavorecido durante mucho tiempo las llamadas representaciones intuitivas y ha privilegiado las representaciones en el sistema simbólico algebraico, que es visto como el registro de llegada de todo aprendizaje matemático, entre otras razones por ser el más formal.

El objetivo del trabajo de García (Idem), fue documentar los obstáculos que muestran algunos estudiantes cuando pasan de una representación a otra. Y cuando sea posible determinar las estrategias que utilizan en este proceso.

Para identificar las estrategias que utilizan los estudiantes al pasar de la representación algebraica a la gráfica y viceversa, se aplicó un cuestionario que consta de cuatro preguntas a seis estudiantes de bachillerato. Los resultados que se obtuvieron como conclusión a estas interrogantes fueron los siguientes:

a. Aunque los estudiantes son capaces de aplicar una regla de codificación, parece haber un obstáculo al escribir la ecuación de la recta paralela a uno de los ejes, tal vez debido a la ausencia de la variable correspondiente a dicho eje, sin

embargo menciona que solo un estudiante logró escribir la ecuación, pero que el mismo no hace uso de las variables visuales ya que recurre a la obtención de la pendiente, como la razón de los incrementos.

b. Una de las estrategias más favorable al encontrar la ecuación correspondiente a una recta, fue el recurso del punteo, tomando los puntos de intersección de las rectas con los ejes y sustituyéndolo en las ecuaciones propuestas.

c. Uno de los obstáculos en la obtención de la ecuación de la recta que presentaron los estudiantes fue la relación que establecen entre las coordenadas de algún punto y los parámetros de la recta.

En "Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una Secuencia Didáctica", Segura, (2004), realiza una ingeniería didáctica mediante la teoría de situaciones de Brousseau, y en la teoría de representaciones semióticas, conjugando en una secuencia situaciones que, además, implican trabajos en diferentes registros de representación semiótica y pasajes entre ellos, siendo su objetivo la elaboración y puesta a prueba una secuencia de enseñanza de calidad.

Durante el desarrollo de la secuencia Segura (idem) manifiesta que la mayoría de los alumnos pasaron satisfactoriamente por la fase de acción, formulación y validación que propone para el proceso de aprendizaje en acuerdo al marco teórico de Brousseau sobre las situaciones didácticas.

Sin embargo, continua Segura (2004), "…*en cuanto a las proyecciones de este trabajo todavía queda mucho por realizar, sobre todo en la comprensión de enunciados que se modelen con un sistema de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta la coordinación y los fenómenos de no- congruencia entre representaciones de registro verbal que reunieran de una conversión a una representación en el algebraico.*"

Segura (2004, pág. 59) cita el trabajo de Ramírez (1997), en relación a "El uso de la calculadora gráficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales, en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas", indica que los alumnos tenían ciertas dificultades con el pasaje del registro verbal al algebraico. Además, dice que generalmente la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se aborda por medio de esquemas abstractos elaborados por los profesores o copiados de algún libro de texto. También comenta el estatus infra-matemático de la representación y resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales, dejando en claro que es un método válido y representativo de resolución.

Entre otras investigaciones ligadas al tema de ecuaciones lineales generalizadas citamos algunas de ellas: Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito. (M. Panizza - P. Sadovsky – C. Sessa; 1996)

Su investigación busca identificar las condiciones de apropiación del algebra elemental en alumnos de escuela media, basándose en los primeros aprendizajes, considerando fundamental la utilización de letras como variables e incógnitas.

Donde su investigación la inscriben en el marco teórico y metodológico de la Teoría de Situaciones (Brousseau, G; 1986), y de la Ingeniería Didáctica (Artigue, M; 1988). Como lo han señalado numerosos investigadores (Cortés, A- Vergnaud, G -Kavafian, N; 1990, Chevallard, I; 1984), el aprendizaje del álgebra supone una ruptura epistemológica significativa. Desde esta perspectiva, los investigadores se proponen realizar un conjunto de observaciones de clases introductorias de álgebra y analizar las propuestas de los libros de texto que funcionan como referencias importantes para los profesores.

En "La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito", esta investigación se ubica en la compleja problemática del pasaje de la aritmética al álgebra, sustentando su análisis en aportes de diferentes investigadores que caracterizan la ruptura que supone este pasaje. Sin embargo, se centraron en el objeto una ecuación con dos variables, tomando la decisión de comenzar con un problema y no directamente con

la ecuación con la idea de indagar si los alumnos, en alguna medida podrían producir la escritura de una ecuación con dos variables.

En cada uno de ellos se han hecho diferentes opciones frente al tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales. El análisis intenta mostrar que, aún haciendo la opción didáctica de incorporar la validación de los procedimientos que se presentan, hay una complejidad en el tema inherente a los elementos de ruptura con el tratamiento aritmético que los nuevos objetos requieren. No se conoce por el momento una propuesta didáctica que contemple tanto el desarrollo del tema en toda su complejidad.

2.5 Contrato Didáctico

Martin y Machín cita a Brousseau (1988), el cual otorga un papel importante al contrato didáctico, que permite que la estructura didáctica funcione de una forma relativamente equilibrada. Debido a una serie de mecanismos más implícitos que explícitos, un "contrato" se elabora entre el profesor y el alumno en relación con el saber, que fija los papeles de cada uno, además, la actividades del profesor como de los alumnos, según Brousseau, hay que evitar dar "recetas" que permitan llegar a la "solución", ya que tienden a descargar al alumno de la responsabilidad fundamental de control de su trabajo intelectual bloqueando por lo tanto la devolución del problema, lo que hace a menudo fracasar la actividad. El estudiante debe construir el significado de las nociones a partir de un conjunto de problemas en donde tal noción funcione de manera más o menos local. (pág. 266).

Por su parte en el artículo la "Dimensión meta-didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática" publicado por Bruno D'Amore, Vincenc Font y Juan D. Godino (2007) manifiestan: En consecuencia, el profesor, en vez de proporcionarle al estudiante el conocimiento, debe proponerle una ¨situación¨ (variando así el contrato habitual) diseñada de forma tal que este conocimiento es necesario para la solución óptima y el alumno aprenderá a adaptarse a un "medio" no falto de dificultades y

desequilibrios. Si se adapta a la situación y llega a la solución del problema, estará proporcionando evidencia de haberse apropiado del saber en cuestión, es decir, puede interpretarse que ha aprendido.

Dentro del marco de la Teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) citado por D' Amore et al. Por el único medio de "hacer" matemáticas es buscar y resolver ciertos problemas específicos y, a este respecto, plantear nuevas cuestiones. «El profesor debe por tanto efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la devolución de un buen problema. Si esta devolución se lleva a cabo, el alumno entra en el juego y si acaba por ganar, el aprendizaje se ha realizado» (Brousseau, 1986, pág. 51).

De esta manera sintética se describe la parte esencial del "contrato didáctico", las reglas que deberían seguirse en el diseño e implementación de procesos de estudio de las matemáticas para lograr un verdadero aprendizaje. La principal tarea del profesor será seleccionar "buenas situaciones – problemas" que den sentido al saber matemático pretendido, procurar su "devolución" a los estudiantes creando las condiciones para que éstos se involucren en una verdadera actividad matemática de resolución, comunicación y validación de las soluciones. (D'Amore, 2007).

Pero, ¿qué ocurre si el alumno rehúsa o evita el problema, o no lo resuelve? El maestro tiene entonces la obligación social de ayudarle e incluso a veces de justificarse por haber planteado una cuestión demasiado difícil. «Se establece una relación que determina explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente lo que cada participante, el profesor y el alumno, tienen la responsabilidad de administrar y de la cual será de una u otra forma responsable ante el otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de ese contrato que es específico del "contenido": el conocimiento matemático pretendido» (Brousseau, 1986, p. 51). Citado por D'Amore et al.

D'Amore et al. Expresa que el contrato didáctico se puede interpretar como el "tira y afloja" que se establece en las relaciones profesor – alumno tendentes a que el aprendizaje de un saber matemático se realice de la manera más autónoma posible por parte del alumno.

El profesor "tira" cuando cede el protagonismo al aprendiz enfrentado a una situación, se abstiene de dar información adicional, pero cuando el nuevo conocimiento se revela como demasiado alejado del alcance del alumno y existe riesgo de abandono, el profesor "afloja" aportando información, modificando el "medio" al que se tiene que enfrentar el alumno. En la teoría de situaciones el contrato didáctico es consustancial con el objetivo de aprendizaje autónomo del alumno enfrentado a un medio a-didáctico.

«La intervención del profesor modifica las condiciones de funcionamiento del saber, condiciones que también forman parte de lo que el alumno debe aprender. El objeto final del aprendizaje es que el alumno pueda hacer funcionar el saber en situaciones en las que el profesor no está presente» (Brousseau, 1988, pág. 322).

Las actuaciones del profesor y los alumnos deben cumplir las siguientes expectativas:

- El profesor debe crear las condiciones suficientes para que los alumnos se apropien de cierto conocimiento, y que reconozca cuándo se produce tal apropiación;

- El alumno debe cumplir las condiciones establecidas por el profesor;

- La relación didáctica debe "continuar", cueste lo que cueste;

- Se supone que el profesor crea las condiciones suficientes para la apropiación de los conocimientos por los alumnos y debe "reconocer" esta apropiación cuando se produce.

Al igual que en el interaccionismo simbólico, donde las normas socio matemáticas son negociadas en el seno de la clase, lo esencial del "contrato didáctico" no son las normas que restringen las actuaciones del profesor y los alumnos, sino el proceso de búsqueda (negociación) de las cláusulas del contrato hipotético.

De este modo, las prácticas (comportamientos) del profesor y de los alumnos en un ambiente de estudio regido por la dialéctica de las situaciones a-didácticas, propia de la teoría de situaciones, son objeto de reflexión e interpretación por parte de dichos agentes, originando metaconocimientos de naturaleza similar a las normas socio matemáticas descritas en la sección anterior.

En el propio desarrollo del contrato didáctico, sus cambios y rupturas en el avance de la progresión didáctica, Chevallard (1988, p. 58) citado por D'Amore et al, identifica una estructura que permanece inalterada: «es el conjunto de cláusulas que gestionan, en un campo dado, cualquier adhesión a un contrato, y asegura su eficacia, cualquiera que sean los contenidos particulares».

D'Amore (Idem) menciona que Chevallard llama meta-contrato a este conjunto de cláusulas definitorias. «Esta estructura permitiría al alumno identificar y dar significado a los "desplazamientos" del contrato didáctico, las ambivalencias, las polisemias, ..., en una palabra, lo que no se dice y que es constitutivo del contrato didáctico que, en último término, son vividos como rupturas en la legislación que se supone establece» (Sarrazy, 1995, pág. 23).

En el caso del contrato didáctico la "cultura" que exige su funcionamiento se presenta como un saber práctico esencial para la eficacia del proceso didáctico y, en particular para el desarrollo y la adquisición de significado por los alumnos de la actividad matemática propuesta.

D'Amore et al. cita a (Chevallard, 1988) el cual expresa que las relaciones entre el profesor y los alumnos que son objeto de análisis mediante la noción de contrato

didáctico, se caracterizan por su asimetría: cada uno tiene su lugar específico, sus tipos propios de intervenciones legítimas, etc., lo que determina su acción sobre el contrato. «Entre los alumnos y el profesor, en efecto, existe una relación de fuerzas cuyo objetivo es, no solamente el respeto del contrato – que normalmente se adquiere, salvo accidente, en virtud del meta-contrato con el cual cada uno está comprometido, sino el contenido del contrato mismo, es decir sus cláusulas específicas» (pág. 60).

2.6 Teoría de Situaciones Didácticas

En una conferencia impartida por la profesora Jesennia Chavarría (2006), en la Escuela de Matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la teoría de situaciones didácticas, cita a Guy Brousseau sobre el desarrollo de sus teorías de situaciones didácticas, manifiesta que: "Al referirnos a las *Situaciones Didácticas*, en principio debemos distinguir dos enfoques: uno, tradicional; otro, el enfoque planteado por la teoría de Brousseau. Ambos en relación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el primero, tendríamos una relación estudiante-profesor, en la cual, el profesor simplemente provee (o deposita) los contenidos, instruye al estudiante, quien captura (o engulle) dichos conceptos y los reproduce tal cual le han sido administrados".

El problema en este enfoque manifiesta Chavarría es que no se contextualiza el conocimiento, no se tiene un aprendizaje significativo. Freire, citado por Chavarría (Idem), apunta con respecto al enfoque tradicional: "La educación padece de la enfermedad de la narración que convierte a los alumnos en contenedores que deben ser llenados por el profesor, y cuanto mayor sea la docilidad del receptáculo para ser llenado, mejores alumnos serán".

Ahora bien, en el enfoque planteado por Brousseau intervienen tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y el medio didáctico. En esta terna, el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento. Así, *Situación*

Didáctica se refiere al conjunto de **interrelaciones** entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico.

La *Situación a-didáctica* es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en un micro-comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido.

La *Situación Didáctica* por otra parte, comprende el proceso en el cual el docente **proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento.**

En resumen, la interacción entre los sujetos de la Situación Didáctica acontece en el medio didáctico que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento (*situación didáctica*) y pueda el estudiante a su vez, afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente (*situación a-didáctica*).

Lo anterior es que el docente debe estar atento a que el medio didáctico reúna las condiciones óptimas de modo que el estudiante pueda elaborar su conocimiento, el cual validará en una Situación A-Didáctica *a posteriori*. Así, el medio es para él su lugar de sobrevivencia.

Brousseau (1997), plantea que cuando la enseñanza acontece como la transmisión al alumno de la responsabilidad del uso y de la construcción del saber se llega a paradojas. Una es la **transmisión de las situaciones**, lo que se refiere básicamente, al efecto Topaze. El docente desea el aprendizaje del estudiante y este último desea aprender, por lo cual, el docente sugiere al estudiante la forma de afrontar los

problemas propuestos, acción que impide la construcción de conocimientos y un aprendizaje significativo.

Otra de las paradojas mencionadas es **la inadaptación a la exactitud**, que es básicamente banalizar los conocimientos matemáticos. Es un problema incluso de transposición didáctica en la que el docente decide perder rigor a cambio de que los estudiantes entiendan, o bien, prefiere rigurosidad con la consecuencia inmediata de la incomprensión por parte de algunos de sus estudiantes. En otras palabras, debe tomar la decisión en cuanto a transmitir el conocimiento sabio tal y como se concibe, ó banalizarlo y transponerlo muchas veces, incluso incorrectamente, para que el estudiante entienda. Esta paradoja se da en dos direcciones tanto del profesor como del estudiante.

Brousseau (1997), menciona como otra de las paradojas **la inadaptación a una situación ulterior**, la cual, refiere a la situación en la que el estudiante construye de forma adecuada un conocimiento, empero, éste podría significar un obstáculo didáctico para otro conocimiento ulterior. Entonces, en esta paradoja el estudiante aprende bien un conocimiento, el cual será un obstáculo didáctico en otro momento.

2.7 Visualización Matemática

Una manera de medir la capacidad del alumno para realizar la conversión, particularmente del registro gráfico al algebraico, es su habilidad para desarrollar la visualización. Nolasco (2000).

Por principio la idea de visualización suele confundirse con la visión, Nolasco cita a los siguientes autores los que manifiestan: Duval (1999, pág. 12) "la visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, es decir ni mental ni física" "… la visualización está basada en la producción de una representación semiótica.".

Al respecto Hitt (1997, pág. 195) menciona: "… que el conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de articular sin contradicciones diferentes tipos de

representaciones del mismo, así como recurrir a ellas en forma espontánea durante la resolución del problema"

Así también, Zimmermann & Cunningham (1991, pág. 17) citado por Nolasco (2000) dicen: "la visualización matemática… da profundidad y significado a la comprensión, sirve como una guía confiable para la resolución de problemas, e inspira razonamiento critico".

Arcavi (1999) admite haber combinado las definiciones de Zimmermann et al. (1991. Pág. 3) y Hershkowitz (1989. Pág. 75) citados por Andalón y Legorreta (s.f) donde declaran "la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento (pág. 56).

Cantoral y Montiel (2001), manifiestan: "la visualización en un sentido amplio la entendemos como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje que aprendemos. De modo que al promover habilidades de visualización se requiera de nociones matemática asociadas a los ámbitos numéricos, algebraicos, gráficos o verbales."

De Guzmán (1996, pág. 17) expresa: "la visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos y también, naturalmente en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático."

De Guzmán (Idem), señala que "la visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestras contemplaciones que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta." (pág. 18).

Continua De Guzmán (Idem) "… la visualización matemática no va a ser un término unívoco ni mucho menos. Según el grado de correspondencia más o menos cercana, más o menos natural, simbólica, incluso más o menos comunicable o privada…entre la situación que tratamos de visualizar y la forma concreta que empleamos para hacerlo van a existir muy distintas formas de visualización."

La visualización y el uso de las múltiples representaciones de un objeto matemático son considerados como un fuerte soporte para la formación de conceptos. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes y usarlas efectivamente para el descubrimiento y el entendimiento matemático y considerar lo visual como un preludio hacia la abstracción de conceptos y así permitir al estudiante formar varios modelos de una situación de aprendizaje. (Hitt, 1998).

El concepto de visualización es ampliamente utilizado en todos los temas relacionados con la matemática, siendo el análisis de textos tan importante, como el desarrollar en el alumno que visualice las diferentes registros de representaciones semióticas en la construcción de conceptos matemáticos, como lo señala Hitt, la visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación en otro.

Una investigación en relación al análisis de texto, llevada a cabo por un grupo de docentes, Ibáñez María Isabel; Fúnez Héctor Nicolás; Egüez Rina Elizabeth de la Universidad de Salta, Argentina, citan diferentes autores que mencionan la importancia del concepto de visualización, como lo manifiesta:

Eisenberg y Dreyfus, en el trabajo "Sobre la resistencia para visualizar en matemáticas'' parten de la conjetura "pareciera como si el proceso de visualizar fuera más difícil para los estudiantes que el proceso analítico".

En su búsqueda por encontrar una explicación a las razones de la evasión visual. Como un síntoma que presentan los estudiantes para no recurrir a la visualización como una estrategia en la resolución de problemas. Distinguen tres causas: una cognitiva (lo visual

es más difícil), otra sociológica (lo visual es más difícil de enseñar) y una tercera, relacionada con las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas (lo visual no es matemático). Esta última es la más fuerte, "la idea de que las matemáticas avanzadas deben ser comunicadas en una estructura no visual es compartida por muchos de la comunidad matemática y está fuertemente arraigada" dicen los autores.

Terminan haciendo referencia a ciertos esfuerzos curriculares en el anhelo de concretar estos avances y concluyen diciendo: "parece haber razones válidas, como las señaladas en este artículo, del por qué los estudiantes tienen problemas para pensar en estructuras visuales. Entendiendo estas razones los profesores y los investigadores deberían ayudar en el desarrollo de materiales adecuados y estrategias de aprendizaje para promover el pensamiento visual".

Al respecto se debe considerar un factor importante en el desarrollo visual del estudiante, en el sentido de la formación de una estructura de resolución de problemas matemáticos, y es que el primer acercamiento que el alumno tiene con los objetos matemático, queda determinado por los profesores y posteriormente con los diferentes libros de texto, ya que como tales juegan un papel protagónico, razón por la cual el estudiante le dé prioridad a la resolución algorítmica.

Planchart (2005) cita a Vinner (1989) quien señala que podría haber dos razones para la preferencia del tratamiento algebraico. La primera razón es que: "la creencia que la prueba algebraica es más matemática y para un examen final es preferible tener la seguridad que arriesgarse por la claridad, simplicidad, inmediatez de la prueba visual. Mientras que la segunda es que: "la pr*eparación para un examen* final es a menudo por enseñanza memorizada. Los estudiantes dan y prefieren la memorización de fórmulas y técnicas algebraicas, lo cual es una receta efectiva para tener éxito en los exámenes." (pág. 92).

Señala también, en uno de sus trabajos, donde reconoció la preferencia que tienen los estudiantes por una representación algebraica. Pudo comprobar la preferencia por las argumentaciones algebraicas de los estudiantes que cursaban el curso Cálculo I.

Por otro lado Eisenberg y Dreyfus, citados por Hitt (1998) señalan que "existe un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, una de las causas posibles es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente, otra es que los profesores de matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual".

Zimmerman y Cunningham (1991) citados por Planchart (2005), han advertido las preferencias que tienen los estudiantes por las representaciones algebraicas, en los resultados de sus investigaciones.

Hitt, F., (1997), señala que: "la construcción de la matemática en una ciencia deductiva libre de contradicciones provocó desde la época de oro de los griegos la evasión de consideraciones visuales. La construcción del edificio matemático ha tenido una tendencia anti-ilustrativa por más de veintitrés siglos''. (pág. 107).

Las investigaciones anteriores ponen de manifiesto la preferencias que los alumnos tienen por el desarrollo algorítmico para resolver un problema matemático, dejando los procesos de visualización en un plano de evasión a la misma, quizá se debe comenzar la enseñanza de la matemática en sentido contrario o de forma paralela a la que actualmente se viene impartiendo. O sea comenzar con la visualización para construir los conceptos de manera que los mismos se manifiesten en forma natural.

Al respecto se debe formular la siguiente interrogante ¿Qué tareas hay por hacer?, para darle el sentido a la pregunta debemos ver lo que De Guzmán (1996, pág. 40) piensa al respecto: "…tratar de enseñar explícitamente a realizar los procesos de visualización correctamente, llamando la atención a los diferentes tipos de visualización y a la diversidad de utilidades de cada uno de ellas, haciendo explicitas las codificaciones y decodificaciones".

“Inculcar los hábitos de visualización, poner de manifiesto los sobrentendidos, la necesidad de asegurar el carácter genérico que está detrás de nuestra visualización concreta, tener en gran aprecio el poder de la visualización y enseñar a nuestros estudiantes a estimarla, insistir constantemente en visualizar y en transcribir de vez en cuando las visualizaciones en expresiones formales de la forma actualmente admitida de los hechos que se visualizan, a fin de hacer patente la posibilidad de pasar de un tipo de lenguaje a otro”. (pág. 40)

Consideremos, pues, la visualización como una herramienta en la resolución de problemas matemáticos, y de acuerdo a lo manifestado por Hitt (1997) “…que el conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de articular sin contradicciones diferentes tipos de representaciones del mismo, así como recurrir a ellas en forma espontanea durante la resolución del problema”.

2.8 Teoría de Registros de Representación Semiótica

Algunos autores han mencionado la importancia de las diferentes representaciones semióticas en la adquisición de un concepto matemático y como estas forman parte de un repertorio útil en la resolución de problemas, es que hacemos referencia de algunos de estos investigadores: Duval (1999); Hitt (1996); Zimmermann & Cunninghan (1991); Eisenberg y Dreyfus (1991), todos ellos citados por Nolasco (2000).

Según Duval (1999), no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Luego de Descartes y de Kant, la representación ha sido el centro de toda reflexión que se preocupa de las cuestiones que tienen que ver con la posibilidad y la constitución de un conocimiento cierto. Y esto, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación’’ (pág. 25).

Duval (Idem), manifiesta que: “el aprendizaje de las matemáticas constituye, evidentemente, un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la contextualización, el razonamiento, la resolución de problemas, e incluso, la comprensión de textos. La particularidad del aprendizaje de las

matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación, distintos al del lenguaje natural o de las imágenes: variados sistemas de escrituras para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraica y lógica que toman el estatus del lenguaje paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y operaciones, figuras geométricas, representaciones en perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.'' (pág. 13).

En base a lo anterior Duval plantea la siguiente interrogante: ¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y de expresión, o al contrario, no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?

Existen dos argumentos muy potentes que parecen imponer la respuesta a la interrogante anterior. El primero es que no puede haber comprensión en matemáticas sino se distingue un objeto de su representación. Desde esta perspectiva, es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, es decir, los números, las funciones, las rectas, etc. con sus representaciones, es decir las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras…, pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes

El segundo argumento es más extenso, más psicológico. Se basa en la existencia de representaciones mentales, es decir, de todo aquel conjuntos de imagines y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación, y sobre aquello que les está asociado. Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado por el lenguaje natural, formula algebraica, gráficos, figuras geométricas…) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es para hacerlas visibles y accesibles a los otros, las representaciones semióticas externas estarán, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirán más que funciones de comunicación.

Con el concepto de registros de representaciones la prioridad en este análisis consiste básicamente en la conversión entre representaciones, de manera que el estudiante pueda desarrollar la actividad cognitiva y realizar la construcción de un conceptos matemático.

En su marco teórico Duval (1993, 1995) introduce los conceptos de **semiosis** (aprehensión o producción de una representación semiótica) y la **noesis** (aprehensión conceptual de un objeto) conceptos que son inseparables en las tareas de conversión entre representaciones las cuales se muestran fundamentales en la construcción de conceptos.

Al respecto y en relación con la semiosis, Whitson (1994) citado por Hoyos (1996; pág. 352 menciona que la **semiótica** se presenta en el campo de la matemática educativa como el estudio de las posibilidad para la actividad signica (o de generación de signos) o semiosis. Como tal la semiótica provee recursos conceptuales y vocabulario necesarios para dar cuenta de la cognición, la enseñanza y el aprendizaje como procesos de mediación signica.

Según Duval (1999), para que un sistema semiótico (conjunto de signos y reglas que representan objetos, donde los signos son las unidades elementales del sistema y las reglas rigen las asociaciones de signos) pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

- Representación identificable.
- El tratamiento de representaciones.
- La conversión entre representaciones de diferentes registros.

La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado: enunciación de una frase (comprensible en una lengua natural dada), composición de un texto, dibujo de una figura geométrica, elaboración de un esquema, escritura de una fórmula.

Entendiendo un **tratamiento** como una trasformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que se utilizan las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación. La **conversión** es, al

contrario una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa. (Duval, 1999, pág. 31).

Por lo que la conversión es una actividad diferente e independiente de la del tratamiento. De las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis, sólo las dos primeras, la de formación y de tratamientos, según Duval (1993), son tomadas en cuenta en la enseñanza. Ya sea que se trate de la organización de secuencias o de la construcción de cuestionarios de evaluación.

Al respecto Hitt (2000) expresa: "la investigación en matemática educativa ha señalado la importancia del uso de varias representaciones en el aula para la formación de conceptos. El trabajo de Duval (1998), considera imprescindibles las tareas de conversión entre representaciones para la formación de conceptos (ver figura 3)".

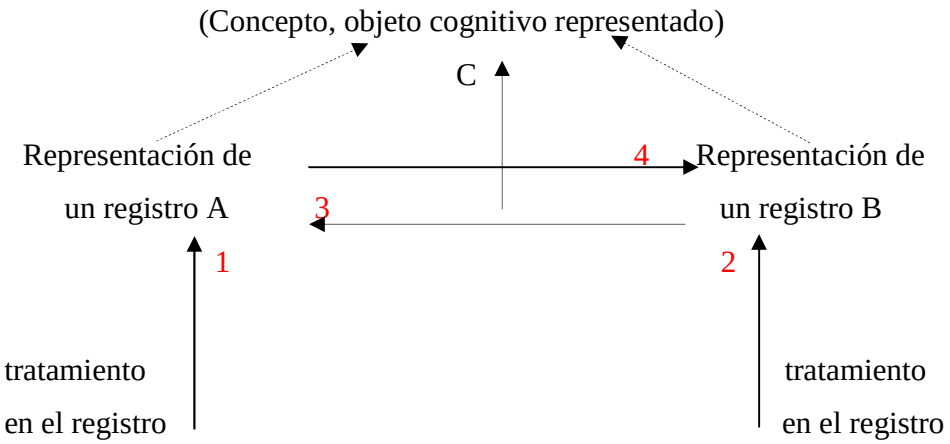


FIGURA 3

Si tomamos como base la figura anterior en relación al problema que representa para el estudiante el aprendizaje del álgebra Hitt (2000), dice lo siguiente: el problema de aprendizaje del algebra desde este punto de vista (uso de varías representaciones) puede ser explicado en término de que los profesores de matemáticas hacen un fuerte énfasis en los procesos algebraicos, restringiendo su enseñanza solo a un tipo de representación que es la algebraica. Es usual que el profesor de matemáticas solicite el paso de una representación a otra, como sucede en las gráficas de funciones, pero ¿Es común que un

profesor solicite que dada la representación gráfica de una función deduzca una expresión algebraica? (pág. 88).

En respuesta a la pregunta anterior las experiencias que obtienen los docentes y el vínculo con los alumnos, les han demostrado que existen obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas en forma general lo que llama a reflexionar en torno de este problema Hitt en su antología "Desarrollo de habilidades matemáticas y construcción de conceptos versus perdida de habilidades matemáticas" menciona que:

> …el maestro de enseñanza básica se esfuerza en la formación de un pensamiento abstracto de sus alumnos a través de impulsar el desarrollo de habilidades algebraicas. Poco a poco, el alumno sin darse cuenta va sufriendo una pérdida del pensamiento aritmético y va adquiriendo destrezas en el terreno algebraico, en el caso de que el alumno no desarrolle sus habilidades algebraicas quedará desprotegido. (Hitt, 2000, pág. 80)

Al respecto Duval (1999) hace referencia al uso de los diferentes registros que se deben desarrollar, principalmente los que se utilizan en matemática, diciendo que los **registros discursivos** permiten describir, inferir, razonar, calcular, mientras que los **registros no discursivos** permiten visualizar lo que nunca es proporcionado de manera visible.

Sin embargo Duval realiza los siguientes comentarios sobre la utilización habitual de estos tipos de registros en la enseñanza de la matemáticas «Las matemáticas y los profesores de matemáticas privilegian con mucha frecuencia los **registros mono-funcionales** o técnicos (son registros ‘’derivados’’ que se especializan en un solo tratamiento).

Sobre los **registros plurifuncionales** (son registros que se utilizan en todos los dominios de la vida cultural y social, se presta para tratamientos más amplios), no solo porque son más potentes sino porque permiten, desarrollar algoritmos, es decir, una secuencia de regla operatorias o de procedimientos, por ejemplo; los algoritmos de las operaciones aritméticas con la escritura decimal, los algoritmos con escritura fraccionaria, aquellos para la resolución de una ecuación (primer o segundo grado) o de un sistema de ecuaciones, los del cálculo de derivadas… estos son tratamiento tipo algoritmo que

tienen aplicaciones en problemas no-matemáticos (físicos, económicos, arquitectónicos, de gestión…) y que los profesores de matemáticas tienden a privilegiar con mucha frecuencia» (pág. 51-52).

Significa que para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, ya que con la representación en un solo registro (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Sin embargo, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada.

La conceptualización de Duval sobre la relación entre diferentes representaciones y sus diferentes registros, como lo son:

◊ El gráfico (representación no discursiva).

◊ El algebraico o el lenguaje natural (representación discursiva).

Proporciona una interpretación semiótica a la relación entre distintos sistemas de signos que representan el mismo objeto.

Cabe señalar que no se debe confundir el objeto matemático con su representación, ya que como puntualiza Duval (1993), esta confusión desencadenará, a mediano o largo plazo, en una pérdida de comprensión y los conocimientos así adquiridos llegan a ser pronto inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje, ya sea por no recordarlos o porque ellos permanecen como representaciones «inerte».

La distinción entre un objeto y su representación es un punto estratégico para el aprendizaje de la matemática, nos referimos pues, a que las representaciones no son sólo necesarias para fines de la comunicación sino que son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.

Con respecto a la figura anterior Duval (1993), manifiesta que la comprensión integral de un concepto implica una coordinación de registros de representación, por lo que la comprensión de un objeto matemático reposa en la coordinación de al menos dos

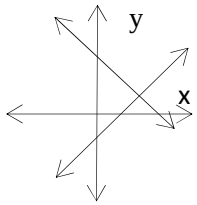
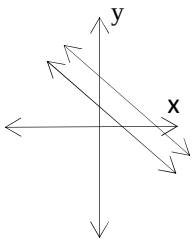
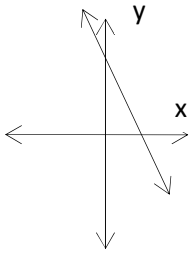
registros de representación. Coordinación que se pone de manifiesto por el uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva lo que da como resultado la articulación entre los diferentes registro de representación semiótica. Entre ellos los más usados están el lenguaje natural, escritura algebraica y gráficos.

Por ejemplo, podemos tener representaciones de un mismo objeto pero con diferentes registros de representación semiótica, Segura (2004), en su tesis **Sistema de Ecuaciones Lineales: una Secuencia Didáctica,** plantea esta situación mediante el siguiente cuadro 2:

Del ejemplo anterior (cuadro 2) cabe señalar que la conversión del registro verbal al registro gráfico no presentaría una exigencia elevada en la actividad cognitiva para el alumno, en cualquiera de las tres representaciones, ni incluso el pasaje del registro gráfico al registro algebraico donde el alumno requiere un grado mayor de actividad cognitiva.

En este sentido y en relación al párrafo anterior Hitt (2003) cita a Eisenberg y Dreyfus (1990) en relación a la dificultad que los alumnos manifiestan no solo para la realizar el paso entre registros, sino las bondades que representa utilizar la visualización ya que la misma es una actividad cognitiva ligada al tratamiento de las representaciones y expresan que:

> *"…pensar visualmente demanda procesos cognitivos más profundos que pensar en forma algorítmica"*, además: *"presentaciones no-visuales son utilizadas para comunicar ideas matemáticas. Esta tendencia se fundamenta en la creencia de matemáticos, maestros, y estudiantes que las matemáticas no son visuales"* (pág. 30).

Objeto Matemático	Representación		
	Registro Verbal	Registro Algebraico	Registro Gráfico
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, solución de un conjunto unitario	Si los lados de un rectángulo se alargan 2 centímetros cada uno, el perímetro es de 24 centímetros. Si se sabe además que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 centímetros ¿Cuánto miden los lados del triangulo?	$2(x+2)+2(y+2)=24$ $x - y = 2$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, su solución es un conjunto vacio	La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma da 700 ¿Cuáles son esos números?	$x + y = 1000$ $2(x + y) = 700$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, su solución es un conjunto infinito	El perímetro de un triángulo isósceles es de 18 cm. Si se suma la medida de uno de sus lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 9 ¿cuál es la medida de cada lado del triángulo?	$2x + y = 18$ $x + \frac{1}{2} y = 9$	

Sin embargo esta habilidad para la manipulación de representaciones de objetos matemáticos, proporcionará a los estudiantes los medios para realizar el paso entre registros, además de la ayuda que proporcionan los procesos de visualización.

El problema se manifiesta al realizar un pasaje del registro gráfico al registro verbal, en el sentido de que se trata de una figura geométrica, en relación al segundo criterio de congruencia de los tres que menciona Duval (1999) y que los define como:

- La posibilidad de una **correspondencia semántica de los elementos significantes** o sea que a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental de la otra representación en correspondencia.

- El segundo criterio es la **univocidad semántica** terminal o sea que a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada.

- Y el tercer criterio es relativo a la **organización de las unidades significantes** o sea las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conducen a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones. (pág. 50).

Significa pues, que se pueden hacer tratamientos en esos registros verbales y realizar conversión del registro verbal al gráfico, pero no en viceversa.

Debido a que no son “funcionalmente equivalentes”, Duval manifiesta: “… *la actividad de conversión no puede ser asimilada a una inferencia, incluso cuando hay no-congruencia. Y esto porque no hay reglas de conversión, pero si hay reglas de tratamiento”*. (pág. 52)

En general, se debe pues enseñar la matemática de manera que la coordinación de los diferentes registros de representación que se utilicen se realice de forma rápida y espontánea, es por ello que el alumno deberá aprender a hacer conversiones de diferentes registros que lo conduzcan a fortalecer la actividad cognitiva.

En este sentido, Hitt en su artículo “El carácter funcional de las representaciones” expresa que Duval tiene como uno de los aspectos centrales en su trabajo de investigación para la construcción de conceptos, las tareas de conversión entre representaciones semióticas de un objeto matemático.

Continua Hitt (Idem), aún más Duval distingue, que existe diferencia marcada en la construcción de conceptos, es decir desde una perspectiva ligada a la vida cotidiana y otra desde el punto de vista del concepto matemático, en el sentido de que los objetos matemáticos (en este estudio en particular “ecuaciones lineales con dos variables”) son accesibles solamente a través de las representaciones semióticas, que se diferencia de la construcción de concepto de la vida cotidiana donde las representaciones de un concepto son objetos físicos.

El marco teórico nos muestra de la importancia significativa que tiene el uso de las representaciones en la enseñanza de las matemáticas, cuya finalidad es desarrollar en los alumnos la habilidad de manipular los objetos matemáticos en sus diferentes registros, ya sea que se realicen en los mismos, tratamientos o conversiones, además las representaciones se deben articular con el concepto de visualización que le da profundidad al pensamiento cognitivo, nuestro objetivo bajo este contexto es promover en los alumnos de Ingeniería Agroindustrial el aprendizaje de las ecuaciones lineales con dos variables, apropiándose de las teoría de registros de representación semióticos y el concepto de visualización.

El desarrollo de habilidades matemáticas en los alumnos de Ingeniería Agroindustrial, se logrará mediante la articulación de la teorías de Duval y Hitt con la aplicación de la teoría de situaciones de Guy Brousseau, que de manera sistemática proporcionan el medio adecuado para que el estudiante contextualice su conocimiento, mediante procesos que faciliten la adquisición de conocimientos a través de acciones, comunicaciones y pruebas donde el estudiante evoluciona en sus conocimientos. Con la articulación de esas tres teorías se pretende hacer un cambio en la instrucción de las matemáticas que ha privilegiado a la representación algebraica en relación a las demás.

Si los alumnos logran coordinar sin contradicciones los diferentes registros en que se pueden representa las ecuaciones lineales con dos variables, haciendo diferencias entre los elementos significantes de las expresiones lograrán la construcción del concepto de ecuaciones lineales con dos variables.

CAPITULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Tipo de Investigación

Este trabajo es una investigación de tipo cualitativa. La importancia de la misma es la observación sobre la coordinación de los registros de representación semióticos que tienen los estudiantes cuando se les proporciona al estudiante un medio didáctico con el objetivo de que construya el concepto de ecuaciones lineales con dos variables.

3.2 Población y Muestra

El estudio experimental se aplicó a toda la clase de Matemática I (MM-110), que consistió en alumnos (entre 18-20 años) del primer semestre de Ingeniería Agroindustrial. Se trabajó con una muestra igual a la población, debido a que el tema en cuestión es parte del contenido a desarrollar, y hubo una gran disponibilidad de todos los estudiantes en colaborar con la investigación.

3.3 Métodos y Técnicas

Para conocer el nivel de conocimiento de los estudiantes con respecto al concepto de ecuaciones en dos variables y sus habilidades de visualización fue necesario construir un cuestionario diagnóstico que a su vez nos permitió conocer las concepciones de los estudiantes con respecto a este concepto, sus dificultades y obstáculos cognitivos.

El método de exploración se llevó a cabo a través de un cuestionario de tres preguntas matemáticas relacionadas con el concepto de ecuaciones lineales con dos variables.

Para realizar la recolección de datos se usaron tres tipos de instrumentos: primero se realizó un cuestionario (ver anexo), segundo una serie de secuencias de actividades problemáticas mediante hojas de trabajo en relación con el contenido que se desarrolló en la clase, que nos permitió profundizar en la investigación del tema en cuestión, y

tercero, realizar registros con cámara filmadoras que muestren las actividades de acción, formulación y validación de la secuencia didáctica.

El método de exploración apunta a obtener respuestas de parte de los alumnos mediante una situación didáctica, de manera que el medio didáctico proporcionado por el investigador cumpla las expectativas para desarrollar en el estudiante la visualización y que el mismo pueda realizar la conversión del registro gráfico al algebraico y viceversa.

En función de los propósitos de esta investigación en la prueba diagnóstica, la primera pregunta tuvo como objetivo conocer si el alumno ha construido la noción del concepto de ecuación lineal con dos variables, como también si puede realizar la conversión entre registros; en la segunda, se le proporcionaron dos gráficas que consistieron en dos partes: la primera se hizo pasar una recta por el origen en donde su pendiente es ascendente, luego otra recta con pendiente descendente con intercepto en los ejes coordenados de manera que ellos puedan realizar una visualización de las **variables visuales** del objeto gráfico; y en consecuencia realizar la conversión al registro algebraico. Siguiendo la secuencia, la tercera actividad consistió en que el alumno obtuviera una representación gráfica dado una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ en forma tabular. En esta última actividad se determinó el nivel de dificultad del significado convencional de las ecuaciones lineales con dos variables.

3.4 Desarrollo de las Actividades para la Construcción del Concepto de Ecuaciones Lineales con dos variables.

Una vez aplicada la prueba diagnóstica con el propósito de analizar el nivel de conocimiento del alumno y poder determinar qué área debemos priorizar y reforzar en el aprendizaje del estudiante, luego se diseñó una secuencia didáctica de actividades para poder lograr los objetivos planteados y además de ello responder a las preguntas de investigación que se formularon con anterioridad, mismas que de manera particular nos indicaron si los conceptos de visualización y la aplicación de los diferentes registros de representación semiótico son una herramienta de provecho que le facilite al estudiante la comprensión y la resolución de problemas de matemática.

El tema de investigación como lo señalamos, se desarrolló dentro del contenido de la asignatura de Matemática I (MM-110) que se impartió a los alumnos del primer semestre de Ingeniería Agroindustrial, por lo que no presentó ningún problema para llevar a cabo la investigación.

Las clases se impartieron de lunes a viernes con una duración de 50 minutos (una hora) lo cual representó por semana 250 minutos (5 horas), lo que de alguna manera favoreció para realizar el experimento en un tiempo significativamente corto.

La secuencia didáctica se orientó de manera tal, que el alumno siguiera en forma ordenada la contextualización del tema de investigación, buscando en ello que su aprendizaje sea significativo y, como lo expresa Montiel y Farfán (2003) apoyadas en las ideas básicas de Brousseau quien manifiesta que el proceso para adquirir un conocimiento matemático consta de diversas facetas y se basa en juegos específicos, donde el actor interactúa con un ambiente a distintos niveles, evolucionando sus nociones y su lenguaje.

Además del cuestionario diagnóstico que nos proporcionó información sobre el saber en juego del alumno, orientamos la secuencia de manera que abordó los niveles de construcción de las ecuaciones lineales con dos variables, apoyados en los procesos de visualización como el eje fundamental para que el alumno desarrollara un pensamiento cognitivo y pudiera coordinar en forma espontánea y coherente diferentes representaciones sin que el alumno manifestara contradicción en la conversión de los mismos.

La importancia para la secuencia didáctica, se fundamentó en los niveles de comprensión del concepto de un objeto matemático, como los menciona Hitt (1998), en su caso particular se refiere al concepto de función, pero que considera la generalización del mismo para cualquier otro concepto. Cabe mencionar pues, hacia donde dirige los niveles de comprensión y los define así:

Nivel 1. Ideas imprecisas acerca de un concepto (mezcla incoherente de diferentes representaciones del concepto).

Nivel 2. Identificación de diferentes representaciones de un concepto. Identificación de sistemas de representación.
Nivel 3. Translación con preservación de significado desde un sistema de representación a otro.
Nivel 4. Articulación coherente entre dos sistemas de representación.

Nivel 5. Articulación coherente de diferentes sistemas de representación en la solución de un problema.

3.5 Procedimiento de Análisis

El análisis se hizo en dos etapas, en la primera analizamos el cuestionario diagnóstico con el propósito de observar en el alumno las estrategias que utilizaron para desarrollar el tema en cuestión y además, si tienen nociones del concepto de ecuaciones lineales, si aplicaron procesos de visualización con el objetivo de que pudieran determinar la pendiente, los interceptos con los ejes coordenados, así como también que realizaran tratamientos y conversión entre representaciones.

En la segunda etapa se estructuró una secuencia de actividades problemáticas, de igual forma se pretendió que el alumno desarrollara la habilidad cognitiva que proporcionara una respuesta a los objetivos y preguntas de este estudio, buscando que mediante la visualización y el pasaje de registros de representación las tareas fuesen el centro para la construcción del concepto de ecuaciones lineales.

CAPITULO 4

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

4.1 Análisis y Discusión de Resultados

Realizamos un análisis de datos de corte cualitativo de manera que la información recolectada durante la secuencia de actividades y de la prueba diagnóstica nos arrojara evidencia del contexto para el cual se diseñó la estrategia y nos proporcionara la información del saber en juego de los alumnos y con ello, poder llegar a conclusiones y recomendaciones para la enseñanza de las matemáticas.

4.2 La Prueba Diagnóstica

Los problemas que se presentaron a los alumnos en la prueba diagnóstica fueron seleccionados en base a los contenidos que se dan en el nivel secundario, mismos que articulan con los contenidos para alumnos del primer semestre de Ingeniería Agroindustrial, y de esta manera los mismos expresaran en sus respuestas el grado de visualización y sus conocimientos previos al realizar el proceso de transición del nivel secundario al nivel superior.

El objetivo en la selección de las tareas fue en primer lugar, que los alumnos dieran a conocer alguna noción de las ecuaciones lineales con dos variables en un registro de lenguaje natural, también se les presentaron dos expresiones, una en el registro algebraico y la otra el registro gráfico de las cuales se les pide que proporcionen expresiones algebraicas y sus respectiva gráficas de manera que exista correspondencia en ambas expresiones, la tarea en esta actividad implica una mayor demanda cognitiva por parte del alumno, en la segunda pregunta la idea se centro en que el alumno identificara las variables visuales al realizar el paso entre registros aplicando el proceso de visualización y en la tercera se le presentan tres tablas cuyos valores corresponden a expresiones algebraicas, en esta tarea el objetivo fue que el alumno realizará el paso de un registro tabular a un registro algebraica; con la idea que identificara en cada expresión los diferentes modelos que le dan significancia a las ecuaciones lineales con variables en relación a las otras dos expresiones que no presentan una ecuación lineal.

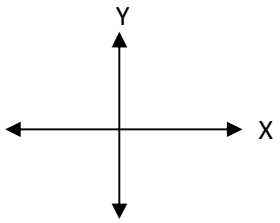
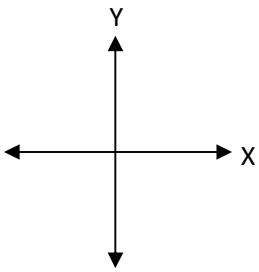
A continuación mostraremos los resultados obtenidos en esta prueba diagnóstica.

Problema 1

En los salones de clases, donde se imparten la asignatura de matemática, se define la noción de concepto de ecuación lineal.

a) ¿Qué entiendes tú por esa noción?

b) ¿Puedes proporcionar dos expresiones algebraicas de ecuaciones lineales y sus correspondientes gráficas?

Expresión algebraica	Gráfica
	
Expresión algebraica	Gráfica
	

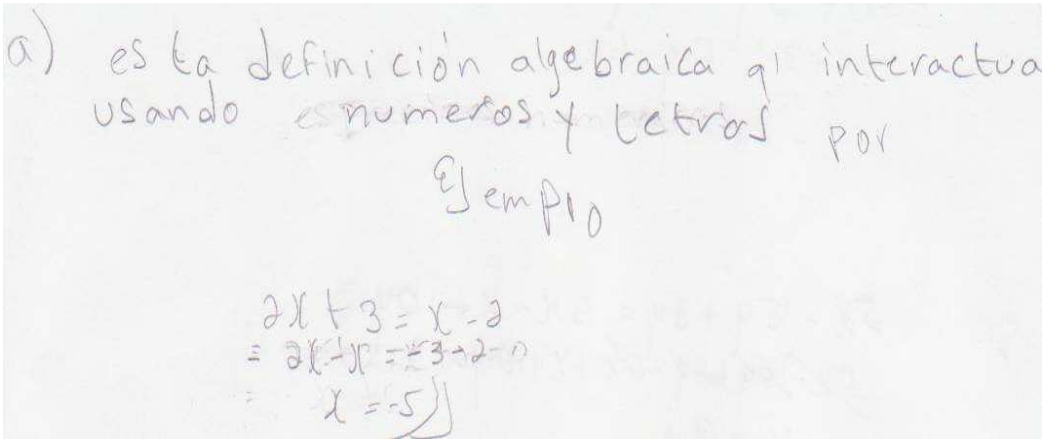
Los resultados de este primer problema son los siguientes:

Inciso a)

De un total de 13 alumnos, el significado que poseen los mismos sobre el concepto de ecuación lineal se manifiesta en las respuestas de cada uno de los alumnos. Del total de respuestas, el 64 % contestaron a la interrogante del concepto de manera no satisfactoria,

en el sentido que se esperaba para el caso una respuesta como *"es una afirmación de que dos expresiones son iguales"* y 36 % no contestaron. Sin embargo, entre el 64 % que contestaron, el 20% de sus respuestas distan mucho de lo que es el concepto de ecuación lineal, relacionando en forma simple el concepto de ecuación lineal con la recta del eje x, otras explicaciones del concepto son expresión algebraica que interactúan usando números y letras.

Para el caso el alumno Ángel Contreras, proporciona un ejemplo donde evidencia que el concepto no lo maneja; sin embargo, la expresión algebraica de una ecuación lineal, de una variable, la tiene bien definida e incluso realiza una operación algorítmica para determinar el valor de la variable.



Inciso b)

Cuadro 1

Categoría	Expresión algebraica	Expresión gráfica
Correctas	3	0
Incorrectas	6	6

Sin respuesta	4	7

Cuadro 2

Categoría	**Expresión algebraica**	**Expresión gráfica**
Correctas	2	0
Incorrectas	5	8
Sin respuesta	6	5

El objetivo de este problema fue determinar si el alumno además de plantear una ecuación lineal puede realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico.

Sin embargo, observamos del cuadro 1, que el 46% de alumnos no proporcionó una ecuación lineal, ni tampoco realizó una conversión al registro gráfico; solamente el 23% proporcionó una expresión lineal de una variable sin que se logre un vínculo con su respectivo registro gráfico, dando la impresión que no distinguen la relación que existe entre el objeto en sus diferentes representaciones, sino que los ven de manera aislada. También observamos que el 54% de los alumnos ni siquiera proporcionaron evidencia de saber qué es una expresión gráfica.

El cuadro 2, presenta casi el mismo panorama, donde podemos observar que el 39% no proporciona una expresión algebraica y el 61% proporciona una expresión gráfica incorrecta, sin embargo el 15% proporcionó una expresión algebraica sin lograr realizar la conversión al registro gráfico; y como lo manifiesta Duval (1993, 1995), la comprensión integral de un concepto implica una coordinación de registros de representación. Lo anterior significa que los alumnos no articulan el objeto en sus diferentes representaciones si no que los ven en forma separada.

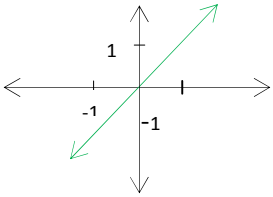
Problema 2

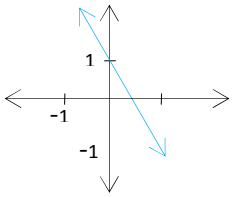
Se le proporcionan dos gráficas en el plano cartesiano, responda lo que a continuación se les pide.

a) Determine la pendiente en cada gráfica y justifique su respuesta.

b) Cuál es la ordenada al origen (o su intercepto) de cada una de las gráficas.

c) Escriba algebraicamente la ecuación de las rectas L y M para cada gráfica.





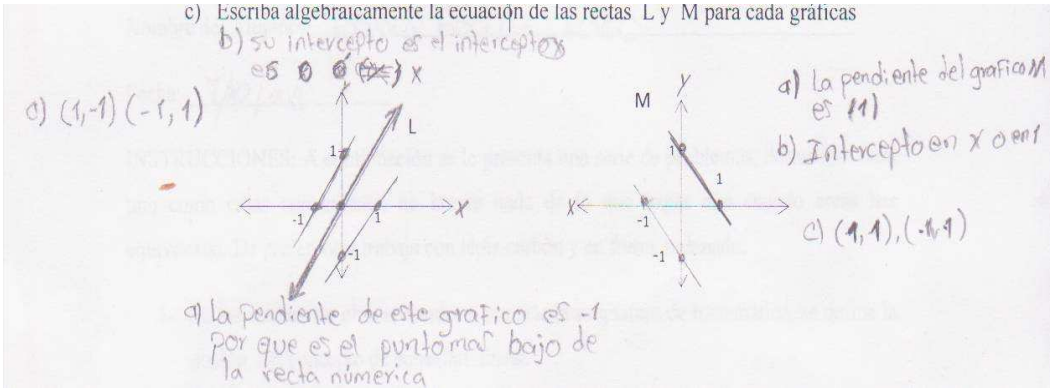
La siguiente tabla muestra los resultados de este problema para cada gráfica.

Gráfica 1	**Pendiente**	**Ordenada al origen**	**Expresión algebraica**
Correctas	0	2	0
Incorrectas	5	3	9
Sin respuesta	8	8	4
Gráfica 2			
Correctas	0	2	0
Incorrectas	5	3	8
Sin respuesta	8	8	5

La tabla anterior nos muestra que los alumnos carecen de una estrategia para determinar tanto la inclinación como la pendiente de una recta en un 61% en ambas gráficas y, en un porcentaje similar, es notoria la falta de procesos de visualización de los interceptos

con el eje de la ordenada, es lógico que esta carencia de procesos y estrategias proporcione cómo resultado la falta de conversión del registro gráfico al registro algebraico y viceversa.

Sin embargo, el alumno Carlos Lobo en su repuesta de la pendiente es acertada en cuanto a magnitud, pero su argumento para determinarla no es muy convincente, ya que en la primera gráfica el sentido de inclinación de la recta lo interpreta como si descendiera, tomando el valor de la misma negativo. En cuanto al intercepto, su interpretación es buena, no así la conversión del registro gráfico al registro algebraico, donde hace uso de dos pares ordenados pero considerando cada uno de ellos como suficiente información para trazar una recta; o sea, simplemente uniendo el primer elemento de un par ordenado con el segundo elemento de ese mismo par ordenado para obtener una recta.



Problema 3.

Se le presentan tres tablas con valores correspondientes a expresiones algebraicas. Su objetivo es determinar cuál de ellas corresponde a una ecuación lineal con dos variables y que justifique por qué es una ecuación lineal.

x	*y*		*x*	*y*		*x*	*y*
-2	5		-2	-3		-2	-8
-1	2		-1	-1		-1	-1
0	1		0	1		0	0

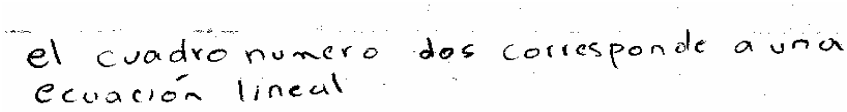
1	2		1	3		1	1
2	5		2	5		2	8

La siguiente tabla nos muestra los resultados de este problema por categorías.

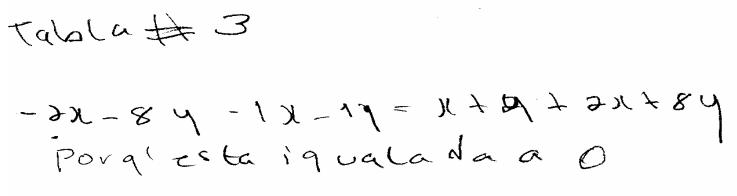
Categorías	**Expresión tabla 1**	**Expresión tabla 2**	**Expresión tabla 3**
Correctas	0	1	0
Incorrectas	4	0	4
Sin respuesta	9	12	9

Una estrategia que se esperaba que los alumnos utilizaran, era la construcción de una gráfica a partir de cada cuadro con sus respectivos pares ordenados, de manera que la misma al proporcionarle un registro gráfico aplicaran el proceso visual para resolver el problema en cuestión, solamente el alumno Cesar logró dar una respuesta correcta; sin embargo, él mismo no justificó su selección de dicha tabla. En este caso, la respuesta quizá se deba a un selección de manera aleatoria sin ningún fundamento matemático; o existe la posibilidad que utilizara el proceso de visualización observando la forma como la variable del eje ordenado presenta sus incrementos de un punto a otro en forma constante.

Si observamos la tabla 1, el 31% de los alumnos seleccionó la tabla sin lograr realizar la conversión al registro gráfico, por lo que manifiestan la falta de conocimiento de un par ordenado que les de la luz, como estrategia para argumentar su respuesta.



Sin embargo, para la tabla 3 la estrategia que utilizaron los alumnos fue plantearse una ecuación lineal donde cada valor asignado a la variable lo tomaron como el coeficiente de la misma, o sea multiplicaron a su correspondiente variable el valor asignado a la misma, que a diferencia del párrafo anterior no construyeron una gráfica para argumentar su respuesta, Ángel contestó:



Significa pues, que los alumnos muestran debilidad en la forma de expresar una representación algebraica como también realizar el pasaje de esa representación al registro gráfico, debemos entender lo anterior en la manera que lo manifiesta Duval (1988, pág. 125) "la razón de la dificultades de lectura y de interpretación de las representaciones de las gráficas cartesianas es el desconocimiento de ellas", Duval se refiere a que el alumno desconoce las reglas de correspondencia.

En relación a la gran cantidad de alumnos sin responder se puede interpretar como una falta de habilidad alrededor del concepto de ecuaciones lineales y como lo presentan los resultados, los problemas del instrumento no provocó en el estudiante una producción de los objetivos esperados, donde el proceso de visualización y la conversión entre registros no presentan una forma de estrategia para resolver objetos matemáticos para el alumno.

4.3 Secuencia de las Actividades Problemáticas

La secuencia de actividades tiene como propósito desarrollar en el alumno su habilidad cognitiva de manera que den respuesta a los objetivos y preguntas de esta investigación, se les explicó a los alumnos la metodología en que se desarrollarían las actividades, como también en la manera en que algunas actividades las realizarían en forma grupal e individual. Todas las dificultades y logros de la secuencia se presentan a continuación:

ACTIVIDAD No. 1

Esta actividad tiene el propósito de explorar acerca del sentido de inclinación que el estudiante tiene en torno a la recta, y al tiempo observar qué dificultades presentan al realizar representaciones gráficas.

En vista de lo anterior consideramos pertinente presentar el siguiente problema, el cual sirvió de base para la formulación de cuatro interrogantes en torno al mismo.

a. Determine el sentido de inclinación de las rectas L, M, N y T que tienen el mismo punto (2,3).

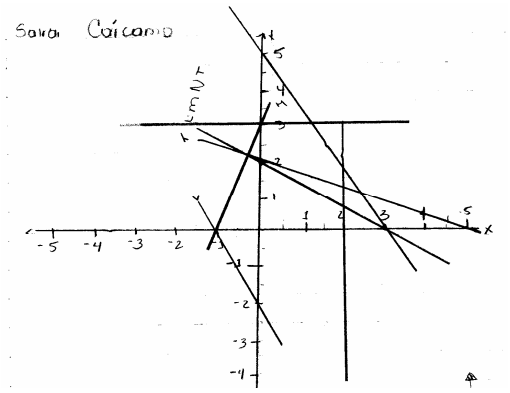
L: P = (2,3) Q (-1,-2)

M: P = (2,3) Q (3, -1)

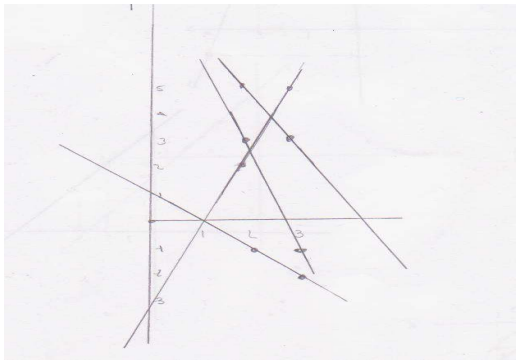
N: P = (2,3) Q (5,3)

T: P = (2,3) Q (2,5)

Un error constante que manifestaron los estudiantes en el trazo de la gráfica al respecto de este problema, fue el hecho de cada par ordenado para ellos representa dos puntos por donde la recta debería cruzar, desconociendo totalmente que la recta está definida por los puntos de cada fila de las cuatro que se presentaron anteriormente. En general, todos los alumnos no respondieron bien este primer problema. Como ejemplo mostramos lo que los estudiantes Saira y Ángel contestaron mediante una representación gráfica.



Como podemos observar en la representación gráfica de Saira en relación a la recta cuya pendiente es cero y la recta cuya pendiente no está definida N y T respectivamente, Saira la grafica de manera satisfactoria, no así para los demás puntos L y M manifestando su obstáculo en la conversión al registro gráfico.



Contrario a ella observamos que Ángel en ningún momento manifiesta claridad para representar las rectas en el sistema de coordenadas, hacemos esta diferencia por las respuestas que tienen relación con los demás problemas así:

b. Si el sentido de inclinación de la recta es hacia arriba, de izquierda a derecha, la pendiente de esa recta es.

Positiva ☐ Negativa ☐

c. Si la inclinación de una recta es hacia abajo, de izquierda a derecha, la pendiente de esa recta es:

Positiva ☐ Negativa ☐

d. Si la inclinación de una recta es horizontal, su pendiente es:

Positiva ☐ Negativa ☐

Cero ☐ No definida ☐

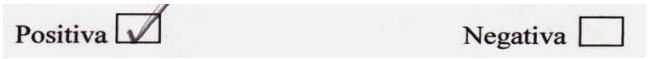
e. Si la inclinación de una recta es vertical, su pendiente es:

Positiva ☐ Negativa ☐

Cero ☐ No definida ☐

Para que los estudiantes proporcionaran respuesta a las anteriores interrogantes, el trazo de las gráficas tiene mucha importancia ya que el propósito era que ellos se apropiaran del proceso visual en la medida del cambio de inclinación manteniendo un punto constante, además que las variables visuales les permitieran recordar y asociarlo con el signo de la pendiente que corresponde a cada recta.

El caso del estudiante Ángel su respuesta del inciso b fue:



Observamos que Ángel en su respuesta está bien, sin embargo, el trazo de su gráfica no presenta dicha argumentación; posiblemente su experiencia de cursos anteriores es que pudo contestar de manera positiva. En relación al resto de los alumnos, su respuesta en su totalidad fue errónea, lo cual queda evidenciado si lo comparamos con en el trazo de la gráfica.

La respuesta que corresponden al inciso c. fueron:

El mismo alumno Ángel contestó bien, así:



Ángel presenta de igual manera al anterior inciso b. el mismo problema, en donde su justificación en el trazó de su gráfica no sustenta su respuesta, manifestando debilidad en la localización de un par ordenada en el sistema de coordenadas cartesianas, el resto de los alumnos su respuesta no fue correcta, manifestando que la pendiente de esa recta era positiva.

La tercera pregunta consistió en determinar cuál era el comportamiento de la pendiente si el sentido de inclinación de recta es horizontal. Al respecto la alumna Saira contestó:



La respuesta de Saira está bien y además se justifica ya que articula con el trazo de la gráfica de la primera pregunta. El 27% de las respuestas de los alumnos estuvo bien, pero sin presentar justificación de la misma, ya que no lo relacionan con su gráfica, y el 73% de los alumnos contestaron de manera errónea.

En la última pregunta corresponde al comportamiento de la pendiente de la recta en función de su inclinación.

La respuesta al respecto fue satisfactoria en un 64% en los alumnos, sin embargo, sus justificaciones no corresponden al trazo de sus gráficas, dentro de estas respuestas satisfactorias solamente la alumna Saira justifica su respuesta contestando de la manera siguiente:



El propósito era que los alumnos en esta actividad, pudiesen realizar una conversión de una representación tabular a una representación gráfica, pero presentan un

desconocimiento de lo que es un par ordenado, y aún mas no pueden ubicar ese par ordenado en un sistema de coordenadas para determinar una recta.

Una estrategia esperada de los alumnos si ellos lograban establecer una representación gráfica, era determinar la pendiente visualizando los puntos interceptos con los ejes de coordenadas, y obtener una razón entre la ordenada y la abscisa, de esa manera establecer mediante la inclinación de la misma el signo que corresponde a la razón de los ejes de coordenadas. Significa, pues, que los alumnos no tienen claro aún el sentido de inclinación de la recta.

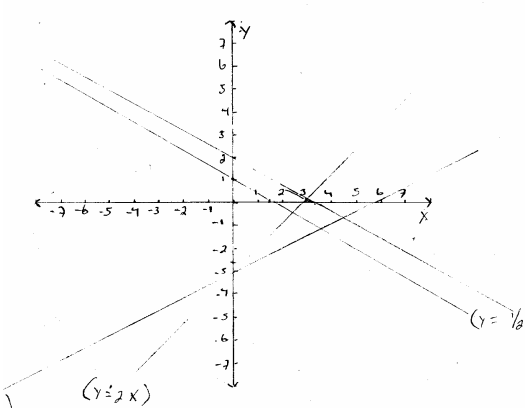
ACTIVIDAD No.2

Una vez que el alumno hubo explorado acerca del comportamiento de la recta, en relación a la inclinación, pendiente, signo de la misma. El propósito de esta actividad consistió en que el alumno al apropiarse de la secuencia anterior, fortaleciera el concepto de noción de pendiente de una recta, con la ayuda de un proceso visual, y el paso de un registro algebraico al registro gráfico.

Los resultados de esta actividad son:

Los alumnos trabajaron de manera individual, para que expresaran que podían realizar el paso del registro algebraico al registro gráfico del inciso **a**. En este caso, no hubo ninguna intervención del profesor durante el desarrollo de la actividad, de igual manera el alumno no planteó pregunta alguna. Los resultados muestran que el 100% de los alumnos no pudo realizar el pasaje entre registros de forma satisfactoria.

Para evidenciar lo anterior Ángel contestó lo siguiente:



El resultado de ángel es similar al resto de los alumnos, la evidencia demuestra que ellos desconocen la variable independiente como una forma de construcción de pares ordenados. El desconocer las variables visuales limita el realizar el trazo de la recta que corresponde a cada ecuación, lo anterior se debe, como lo menciona Duval (*Idem*) que las dificultades que presentan los alumnos para el reconocimiento de lectura y de interpretación de las representaciones es debido a la necesidad de una vía de "interpretación global" de las propiedades de las figuras mediante las cual se asociaría una variable visual de la representación como una "unidad significante".

Esta actividad muestra que están presentes en su mayoría las principales variables visuales, a acepción de la posición con el eje y donde su intercepto en cada ecuación corresponde a cero (0) o sea que su partición es simétrica; significa pues, que el alumno debió asociar el trazo de la gráfica en la medida que la misma cambia la inclinación de menor a mayor ángulo con los ejes, en el grupo de ecuaciones número 1, y caso contrario en el grupo de ecuaciones número 2.

En relación con las respuestas del inciso b, donde se les pide a los alumnos que dibujen una recta que pase por punto (3, 2) y con pendientes,

a. 3/4 b. – 4/3

Ninguno de los alumnos trabajó en este problema. No trazaron gráfica alguna, por lo tanto era evidente que no podían ubicar un punto en el sistema de ejes de coordenadas. Lo que queda demostrado que no asocian el sentido de inclinación con la pendiente de la

recta, ni tampoco el signo da la misma para determinar el trazo subiendo o el trazo de la recta bajando.

ACTIVIDAD No 3

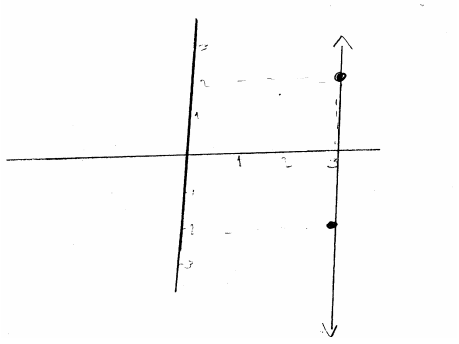
El propósito de esta actividad fue explorar el tipo de estrategia que el alumno utiliza para pasar de una representación a otra.

En el primer problema se les pedía a los alumnos que dibujaran la gráfica de la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (3, -2) y que verificara si su sentido de inclinación es:

Vertical ☐ Horizontal ☐

Los resultados de este inciso fueron:

Los alumnos contestaron de forma correcta, seleccionando que la recta tenía un comportamiento vertical, pero solamente dos de ellos presentaron un buen argumento que justificó su respuesta, realizando una representación gráfica coherente y de manera satisfactoria en función a su respuesta, la evidencia al respecto fue las presentadas por Ángel y Cesar:



Podemos observar de manera clara, que el alumnos Ángel representó bien los pares ordenados y además unió los mismos para obtener la recta que corresponde a esos puntos, contrario al resto del grupo de estudiantes que continúan desconociendo lo que es un par ordenado y que de manera errónea confunden que el primer elemento de ese par ordenado corresponde a la abscisa y el segundo elemento a la ordenada.

La respuesta en relación al sentido de inclinación de este primer problema Ángel contestó:

Vertical ☑ Horizontal ☐

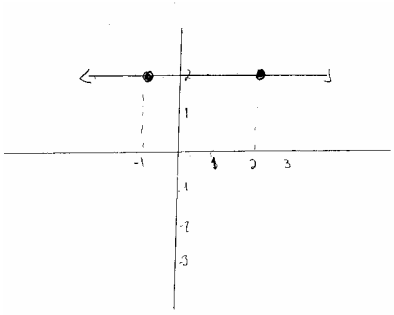
En relación con el problema del inciso b, se les solicitó a los alumnos que dibujaran la gráfica de la recta que pasa por los puntos (2, 2) y (-1, 2) y que verificaran si su sentido de inclinación era:

Vertical ☐ Horizontal ☐

Las respuestas a esta interrogante fueron:

De manera similar al anterior inciso, el 100% de los alumnos contestaron bien, seleccionando que la recta tenía un comportamiento horizontal, pero de nuevo solamente Ángel y Cesar justificaron su respuesta realizando una representación gráfica coherente y satisfactoria en función de su respuesta.

La respuesta de Ángel fue:



Observamos de manera clara que el alumno Ángel representó bien los pares ordenados y que además unió los mismos para obtener la representación gráfica de una recta horizontal, el resto del grupo no justificó su respuesta aunque la misma sea correcta, lo que significa que todavía desconocen lo que es un par ordenado.

La respuesta de Ángel de este problema fue:

Vertical ☐ Horizontal ☐

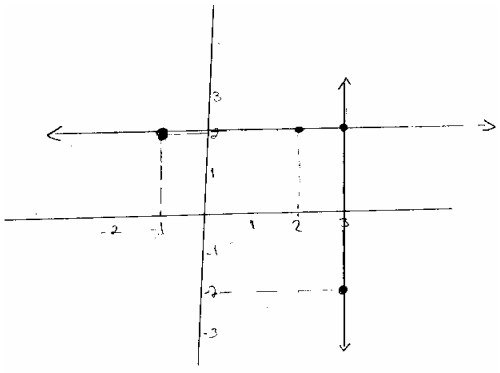
En el problema del inciso c., se les pedía a los alumnos que de los incisos anteriores a) y b), dibujaran en un solo plano de un sistema de ejes de coordenadas las rectas y determinaran:

C 1. El punto de coordenadas de intercepción de ambas rectas:

Los resultados se analizan de dos formas, la primera forma, un caso donde la respuesta es correcta teniendo una justificación aceptable y en un segundo caso donde la respuesta también es la correcta pero la justificación no sustenta la misma, así:

Primer caso.

El alumno Ángel contesto de la siguiente manera:



Y su respuesta del punto de coordenada es:

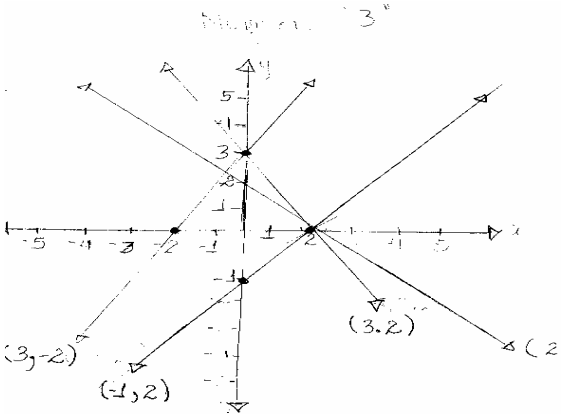
c.1 El punto coordenado de intercepción de ambas rectas. (3 , 2)

Segundo caso

La alumna Elsy su respuesta y representación gráfica fue la siguiente:

c.1 El punto coordenado de intercepción de ambas rectas. (3 , 2)

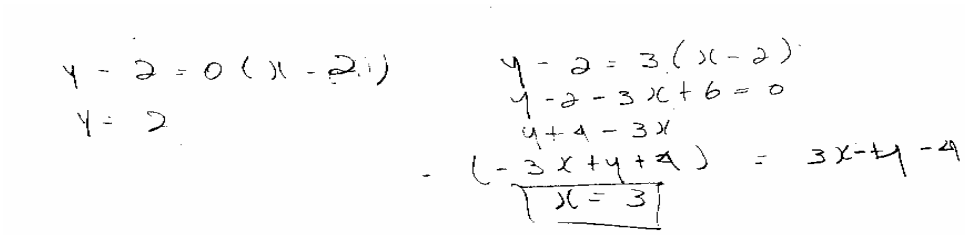
En relación a su justificación, el registro gráfico de Elsy:



Podemos observar que Elsy respondió bien pero carece de una justificación con respecto a la representación gráfica, en caso de Ángel nos damos cuenta que su respuesta si coordina con la representación gráfica, el resto de los alumnos a excepción de Cesar sus respuestas son correctas pero carecen de justificación.

c.2 la ecuación de cada recta.

La repuesta de Ángel fueron las siguientes:



Se observa que Ángel prefiere desarrollar una ecuación lineal, aplicando la fórmula punto- pendiente, cuyas respuestas corresponden a la rectas de la representación gráfica, sin embargo, la utilización de la pendiente para la recta horizontal la respuesta de la ecuación está bien, no así para la ecuación donde utiliza la pendiente no definida, manifestando que no maneja de manera satisfactoria el concepto, aunque su respuesta sea correcta.

Ángel presenta una ausencia de habilidad de visualización, dándole prioridad al proceso algorítmico para obtener sus respuestas, Al respecto Hitt (1997, pág.195) menciona: "… *que el conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de articular*

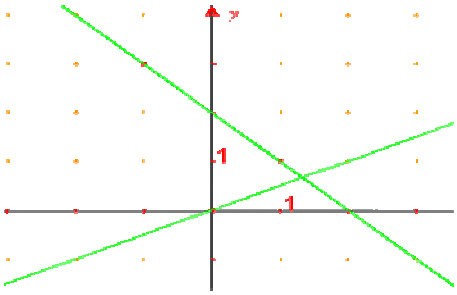
sin contradicciones diferentes tipos de representaciones del mismo, así como recurrir a ellas en forma espontánea durante la resolución del problema".

Lo anterior significa que si Ángel hubiese analizado cada una de las representaciones gráficas, las variables que se refieren a cada eje donde la recta es paralela, las mismas desaparecen, por lo que su respuesta debió haber sido espontánea o sea que la recta que es paralela al eje y su respuesta inmediata debió ser $x = 3$, y además de ello pudo fortalecer la misma recurriendo al proceso algorítmico, de manera que al articular ambos conocimiento su aprendizaje fuese significativo.

ACTIVIDAD No. 4

En esta actividad se les presentaron tres problemas, el propósito fue que los alumnos utilizaran el proceso visual como una primera estrategia en la resolución de los problemas, luego pudiesen realizar conversión de una representación gráfica a una representación algebraica y viceversa, como también lograran hacer tratamiento de un mismo objeto.

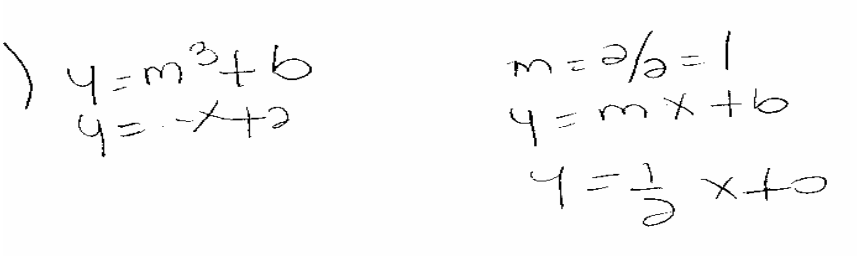
El primer problema era que los alumnos determinaran la ecuación de las rectas Z y W, si la gráfica es:



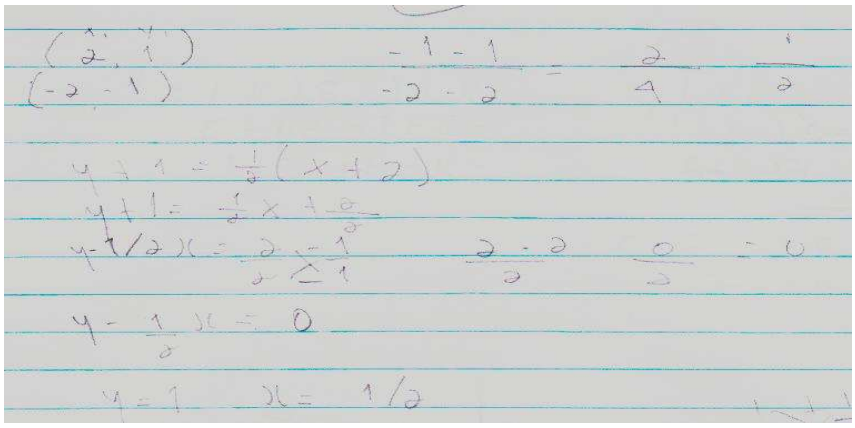
Los resultados de este primer problema fueron:

La alumna Kristabell en el cálculo de la pendiente utilizó la estrategia de elevación de la recta en el eje y tomando el punto de intercepción con el mismo, y con el recorrido en el eje x obteniendo una razón y luego, al obtener la pendiente la utilizó en la ecuación de una recta lineal pendiente ordenada al origen, las respuesta está bien al final, pero no es

clara en cuanto a la aplicación de las variables visuales y la utilización de la fórmula de la ecuación lineal.



Otro caso de análisis es el presentado por Ángel, el cual coincide con el de Kristabell solo que Ángel utiliza la fórmula de la pendiente, y dos pares de puntos de coordenadas de la recta W y luego la sustituye en la ecuación lineal punto – pendiente, su resultado fue:



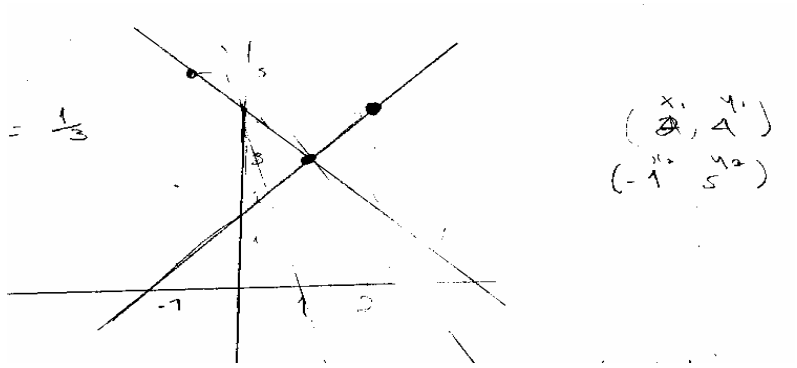
Todos los demás estudiantes presentaron dificultad para obtener las respuesta a este problema, manifestando la dificultad en el pasaje entre el registro gráfico al registro algebraico.

El segundo problema era determinar dos ecuaciones que pasen por el punto (1, 3).

Los resultados muestran que los alumnos todavía tienen dificultad de ubicar un par ordenado en el sistema de coordenadas posiblemente lo anterior se deba a la resistencia de realizar un buen análisis visual, al respecto De Guzmán (1996, pág. 17) manifiesta que: *la visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una*

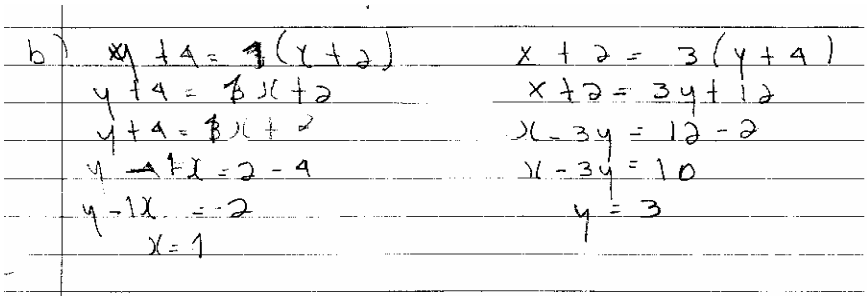
interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta.

El alumno Ángel presentó algunas respuestas donde él ubica el punto dado muy bien así:



Podemos observar que en la gráfica Ángel selecciona dos pares ordenados que articulan con el par ordenado dado y además los ubica muy bien para el trazo de las recta lo cual es aceptable, su problema es evidente al realizar la conversión al registro algebraico, donde puede resolver algebraicamente un problema como bien lo manifiesta, pero la falta de conocimiento de la variables visuales le impide dar la solución al problema.

Del registro gráfico que desarrolló Ángel su respuesta fueron:



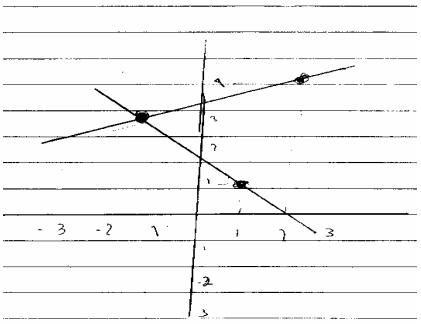
En primer lugar el punto (2, 4) se localiza en el cuadrante I, significa que si Ángel utilizó la fórmula punto-pendiente debió mantener constante el signo de la fórmula, aun cuando el resultado es el correcto, lo anterior se debe a que la pendiente es ascendente y además con magnitud uno (1), también es importante mencionar que el valor que le asigna a la

variable x que es “uno” lo confunde con el de la pendiente de la recta, al observar el registro gráfico y analizar la ecuación, las variables visuales en este caso en particular son 2 como ser el intercepto al eje ordenado y con pendiente uno, y el trazo de la recta es subiendo.

Si lo anterior lo hubiese aplicado en la segunda gráfica, el sentido de inclinación es bajando lo que le permite asumir que la pendiente es negativa y con valor de uno, su intercepto con la ordenada es cuatro (4), esto en cuanto al proceso visual, más la aplicación del criterio de Duval en relación a las variables visuales, articulan para que su respuesta a este problema sea $y = -x + 4$, que no coincide con el desarrollo de la segunda ecuación que aparece al lado de la primera.

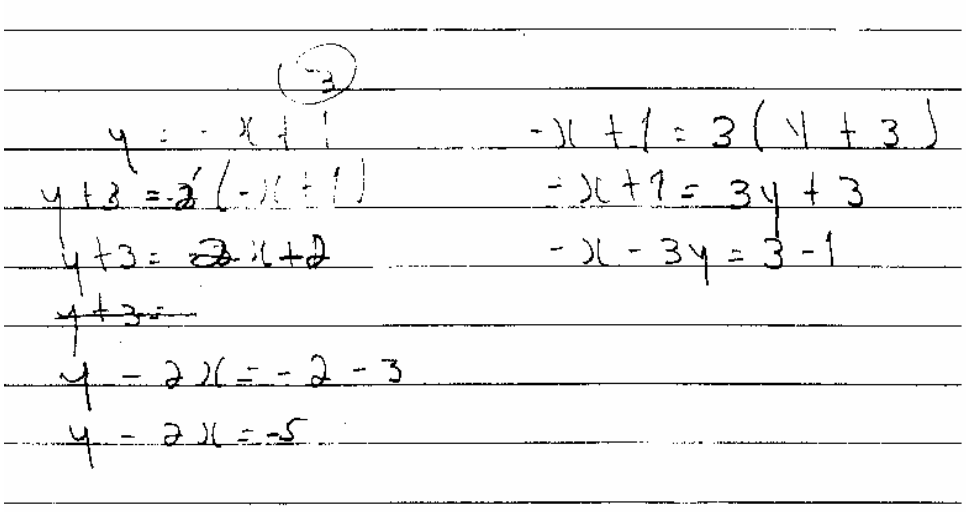
En el tercer problema el propósito era que el alumno se apropiara de la secuencia de esta actividad, qué ubicara una nueva coordenada (-2, 3), pero que la misma este contenida en la ecuación de la recta $y = - x + 1$, determinando otra ecuación que contenga a dicho punto.

El problema de los alumnos en cuanto a la ubicación de puntos de coordenadas e interpretación de las gráficas, continúa igual al que presentaron en los dos primeros problemas, a excepción del alumno Ángel cuyas respuestas fueron las siguientes:



Podemos observar que Ángel se ha apropiado de la ubicación de los puntos de coordenadas, pero continua manifestando problema al realizar la conversión de la representación gráfica al registro algebraico.

La respuesta de Ángel, en relación a la conversión del registro gráfico al registro algebraico fue:



De la representación algebraica anterior nos damos cuenta que Ángel continúa confundiendo el valor de la variable *x* con el de la pendiente, es por ello que tomó en la primera ecuación el valor de -2 como la inclinación de la recta y luego la sustituyó en la fórmula punto-pendiente, valor que es totalmente erróneo y no coincide con los valores de las pendientes, respecto de los puntos que él representó en el registro gráfico.

Además de ello, no tomó como referencia el punto (-2, 3), de esa manera las pendientes solamente son semejantes en el sentido de inclinación y no así con el valor de las pendientes.

La estrategia esperada que los alumnos desarrollaran era que al proporcionárseles la ecuación de una recta visualizaran el sentido de inclinación donde su pendiente es negativa o sea su trazo es hacia abajo, además del corte con el eje *y* que es uno (1), si el alumno al analizarlo detenidamente podía trazar una recta desde el punto dado y realizar un corte con el eje *y,* ya sea que la recta intercepte la ordenada en un punto positivo o negativo.

La secuencia de esta actividad y de las anteriores se propuso de manera constante que el alumno desarrolle su pensamiento cognitivo y en consecuencia su habilidad matemática, como lo expresa Duval (1999, pág. 13): *la particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requiera de la utilización de sistemas de expresión y de representación.…*

ACTIVIDAD No. 5

El desarrollo de esta actividad tiene como objetivo el que los estudiantes se apropien del proceso visual para que puedan realizar conversiones entre registros sin contradicciones y logren el conocimiento del concepto en cuestión.

Esta actividad presenta la articulación de tres conceptos básicos como ser la visualización, conversiones entre registros y variables visuales, si el alumno logra apropiarse de las mismas contextualizará su conocimiento y su aprendizaje será significativo.

Se les plantearon a los alumnos dos problemas, los cuales se analizarán de manera separada.

El primer problema era representar en un mismo sistema de coordenadas las siguientes ecuaciones:

$y = 2$

$y = x + 2$

$y = -x + 2$

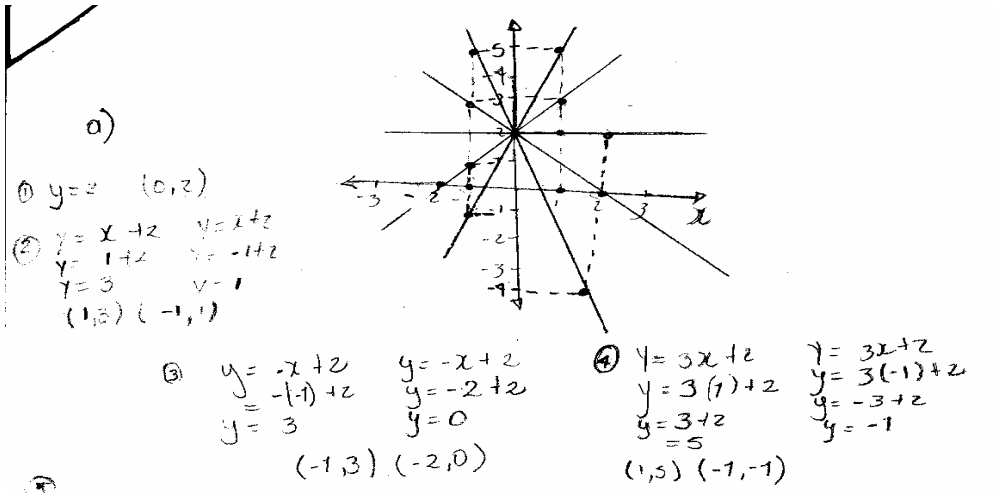
$y = 3x + 2$

$y = -3x + 2$

Y contestaran a la siguiente pregunta ¿Qué puedes concluir de las rectas que tienen la forma $y = m\,x + 2$ con relación a la gráfica que representaste?

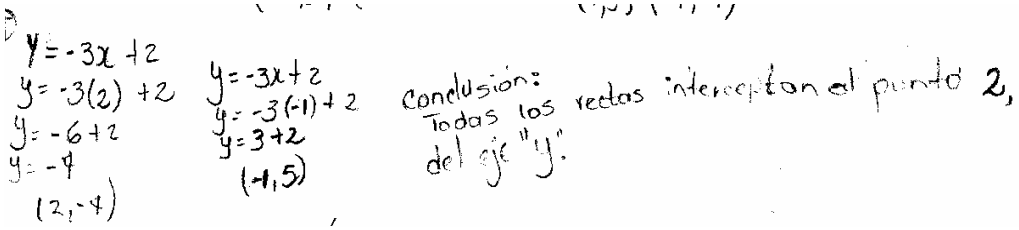
Los resultados de esta actividad fueron los siguientes:

La estrategia que utilizó la alumna Deisy para el trazo de las rectas fue:

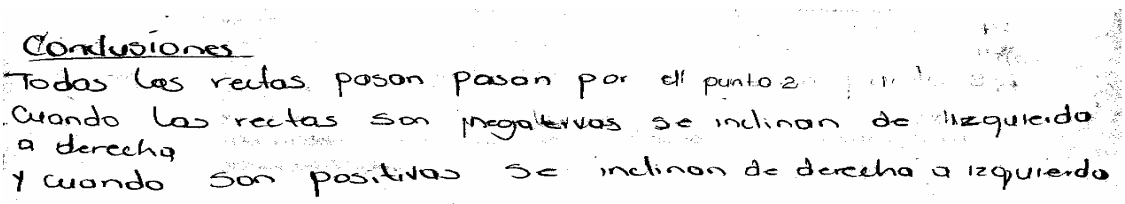


Observamos que seleccionó algunos números de la abscisa y los sustituyó en la cada ecuación de la recta para formar un par ordenado y luego trazar la recta uniendo los puntos.

La conclusión a la que llego fue la siguiente:



En su mayoría todos los estudiantes graficaron bien, pero sus conclusiones variaron, para el caso la alumna Saira en su respuesta expresó:



Podemos observar que la alumnos identifican muy bien el intercepto al origen y aún mas establecen correspondencia de la recta y su sentido de inclinación, dando muestras que han logrado identificar las variables visuales, apoyándose en la estrategia de pares ordenados como una solución al problema de conversión.

El problema del inciso b era representar en un mismo sistema de coordenadas un conjunto de rectas cuyas ecuaciones son:

$y = 2x$

$y = 2x + 1$

$y = 2x - 1$

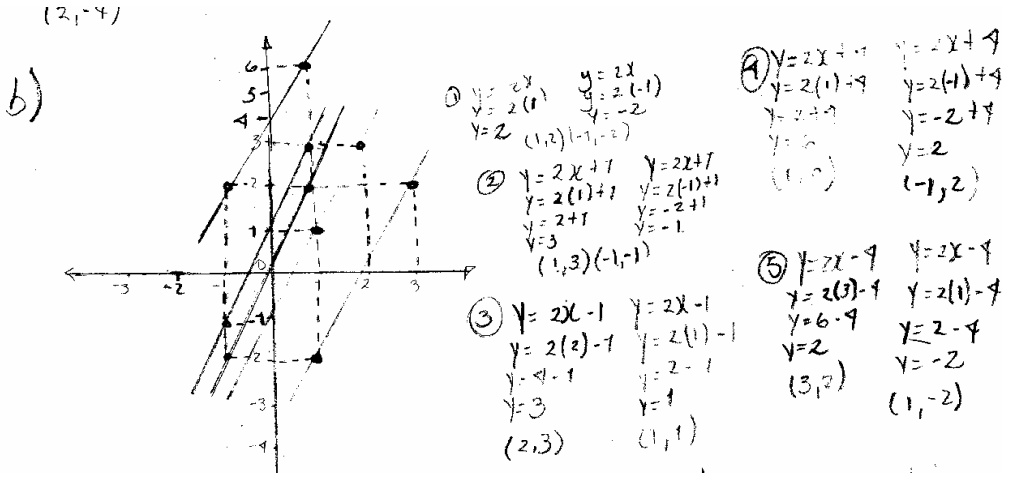
$y = 2x + 4$

$y = 2x - 4$

Y contestar la siguiente pregunta ¿Qué puedes concluir de las rectas que tienen la forma $y = 2x + b$ en relación a la gráficas que dibujaste?

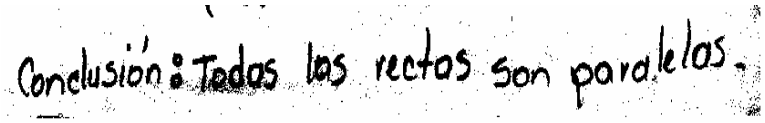
Los resultados de esta actividad fueron los siguientes:

La estrategia de la alumna Deisy, para representar las gráficas fue igual al problema del inciso a, así:

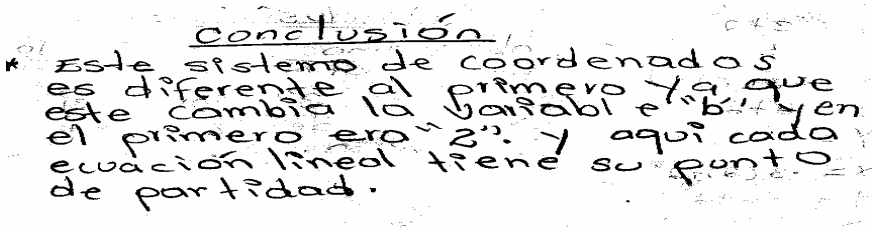


Seleccionó un número de la abscisa, luego lo sustituyó en la ecuación lineal y formó pares ordenados para terminar uniéndolos y así representar una recta.

La conclusión a la que llegó fue la siguiente:



Los demás alumnos realizaron la construcción de una representación gráfica satisfactoriamente, sus conclusiones son similares pero carecen de un mayor análisis, para el caso la alumna Lilian su respuesta fue:



La estrategia esperada por los estudiantes era que al construir sus rectas visualizaran que en primer lugar al cambiar el signo de la pendiente la inclinación de la recta también se modificaba manteniéndose el corte con el eje de la ordenada e incluso si el trazo de la recta era subiendo su ángulo de la misma con el eje de la abscisa aumentaba y viceversa.

En el segundo problema era analizarlo de forma similar al anterior, en este caso lo que se mantiene constante es el trazo de la recta subiendo, al visualizar que no cambia la inclinación es porque la pendiente es constante y positiva, además la posición con el eje de la ordenada en todo momento está cambiando.

De lo anterior los alumnos han demostrado una estrategia para la conversión del registro algebraico al registro gráfico, dándoles claridad al uso del par ordenado, y además como ubicarlo en el sistema de ejes coordenados; lo anterior permitió que los estudiantes visualicen que la pendiente de la recta permanece constante, no así el intercepto al origen como lo definen en sus conclusiones.

Al respecto, como ya lo señalamos antes, Hitt (1997, pág. 195) se refiere: "…*a: que el conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de articular sin contradicciones diferentes tipos de representaciones del mismo, así como recurrir a ellas en forma espontánea durante la resolución del problema."*

ACTIVIDAD No 6

El propósito de esta actividad es darle continuidad a la secuencia de las actividades anteriores, de manera que se identifique si los estudiantes desarrollaron la habilidad de conversión entre registros y que puedan realizar la coordinación entre los mismos; haciendo cambios en algunas variables visuales, esto los conducirá a visualizar el comportamiento del objeto tanto en el registro algebraico como en el registro gráfico.

Para realizar la actividad se ordenaron en tres grupos de estudiantes, con tres alumnos por grupo, los tres grupos contestaron el primer problema muy bien.

En el primer problema se les pedía lo siguiente:

1. Sea la ecuación de la recta L de la forma $2x + 4y – 8 = 0$

   a.1 Dibuje una gráfica que represente la recta L

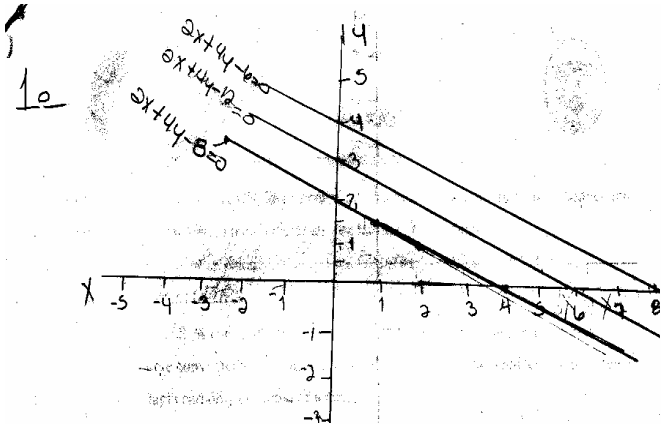
   a.2 Indique las coordenadas donde la recta L intercepta a los ejes x y y.

   a.3 Considera que la recta L en la ecuación $2x + 4y – 8 = 0$, contiene los puntos con coordenadas: justifique su respuesta

   (0, 0) ☐ (1, 3/2) ☐ (-2, 3) ☐

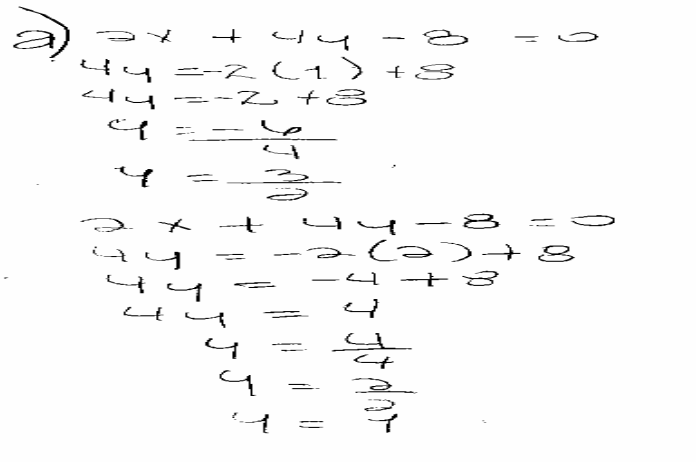
Los resultados a cada inciso de este problema fueron:

La alumna Kristabell en su respuesta expresó lo siguiente:



Podemos observar que la representación gráfica está bien construida, la estrategia que ella y los demás estudiantes utilizaron fueron similares a ésta, tomaron un número del eje de la abscisa y luego lo sustituyeron en la ecuación lineal, despejando para la ordenada, con lo anterior formaron un par ordenado el cual lo ubicaron luego en el sistema de ejes de coordenadas.

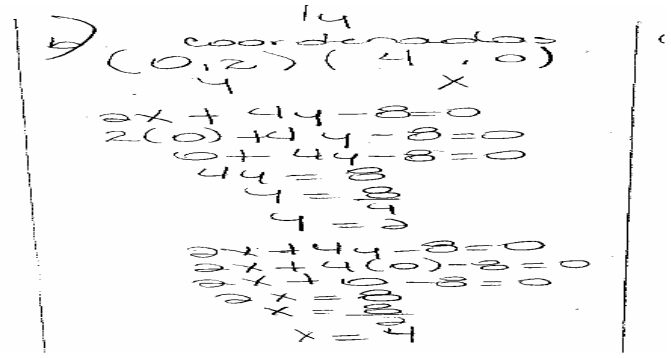
Los cálculos que realizó Kristabell fueron:



La estrategia que se esperaba por parte de los alumnos fue que manipularan la ecuación y la dejaran de la forma pendiente y ordenada al origen, que les permitiera visualizar las variable visuales; la manipulación del objeto realizando operaciones algorítmicas hizo que la alumna lograra visualizar e incluso obtener una familia de rectas a partir de la recta dada. Sin embargo, el hecho de construir la recta les facilitó visualizar los

interceptos en los ejes de coordenadas y sus respuestas fueron por parte de todos los alumnos muy bien contestadas así:

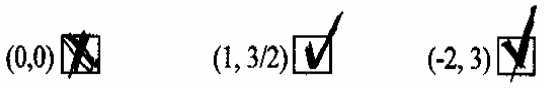
La misma alumna Kristabell contestó el segundo inciso de esta pregunta de la siguiente manera:



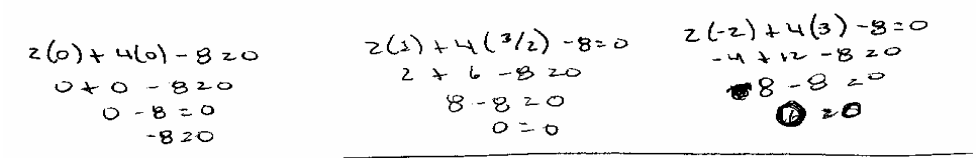
Los pares ordenados que seleccionó Kristabell son los correctos, además de ello, realizó la prueba de que dichos puntos eran los correctos, sustituyendo el número cero del primer par ordenado y que corresponde a la abscisa en la ecuación para determinar el segundo elemento que corresponde a cada par ordenado. Lo que le proporcionó mayor seguridad del proceso visual que llevó a cabo en la selección de esos pares ordenados.

En relación al tercer inciso de este mismo problema las respuestas son:

El alumno Norman contestó y justificó lo siguiente:



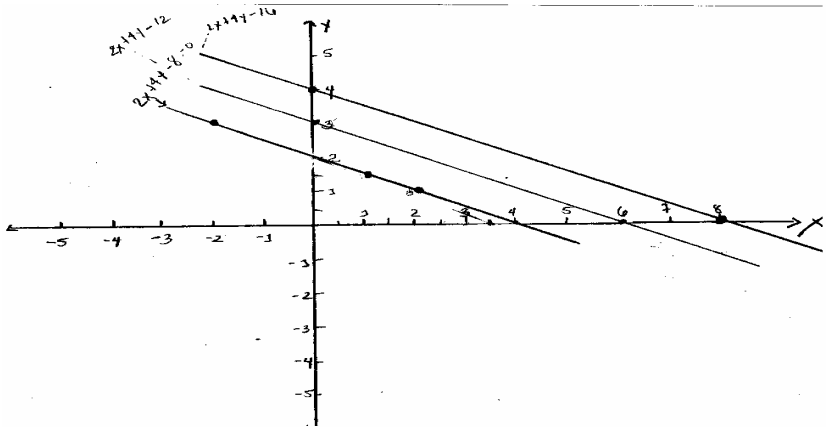
Su justificación a estas respuestas fue la siguiente:



Las respuestas de Norman son correctas al analizar su justificaciones, él consideró, como el resto de los alumnos que al sustituir cada par ordenado en la ecuación, y la igualdad no correspondían a números de igual magnitud, ese par ordenado no estaba contenido en la recta de dicha ecuación.

En el segundo problema se les pedía a los alumnos que indicaran gráficamente una familia de rectas que cumplan con la ecuación del primer problema.

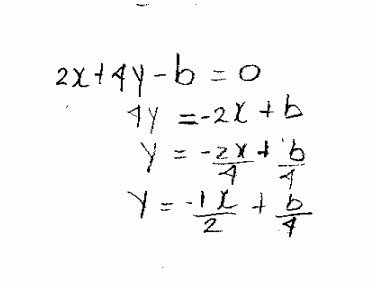
Los resultados de la alumna Saira fueron los siguientes:



La alumna Saira utilizó como punto de partida la ecuación que se le proporcionó y luego cambió la magnitud del término independiente, tomando el punto del eje x y del eje y como cero y los sustituyó en la ecuación, esto le permitió formar un par ordenado, graficándolo en el sistema de coordenadas, lo anterior nos indica que los alumnos se apropiaron de la herramienta de los pares ordenados como estrategia en la resolución de las ecuaciones lineales.

En la pregunta del tercer problema se les pedía a los alumnos que encontraran una expresión algebraica para la familia de rectas del problema número dos. Las respuestas de este problema fueron:

La alumna Deisy y su grupo contestaron así:



Observamos que Deisy en su expresión algebraica solamente define el intercepto con la ordenada para valores positivos del mismo, lo que limita visualizar el comportamiento de la recta donde corta al eje y en puntos negativos, para el resto de los grupos la respuestas fueron similares sin percatarse de que el intercepto en la ordenada puedo tomar un valor negativo; sin embargo, Deisy manifiesta una buena base en la manipulación algorítmica, ya estableció una expresión algebraica que le permitiera visualizar la dirección de la pendiente y del intercepto.

Además de la aplicación del proceso visual, los alumnos manifestaron de manera intuitiva y mediante el ensayo la aplicación de los pares ordenados como estrategia de resolución de las ecuaciones lineales.

Herscovics (1980) citado por Hoyos (1998) en su trabajo de la enseñanza de la recta y de la ecuación, realizó una investigación sobre la construcción de significados para las ecuaciones lineales. Su teoría la orienta a una propuesta de alternativas didácticas para la construcción del concepto de ecuación, llamando a la primera “intuitiva” misma que está basada sobre un patrón de reconocimiento y ensayo, la segunda construcción es llamada “relacional” dado que está basada en el concepto de pendiente con dirección.

Sin alejarse de la investigación de Herscovics(Idem) y de sus propuestas, el objetivo de esta secuencia de actividades, es lograr desarrollar en el alumno que mediante la **visualización** él mismo **reconozca** un patrón de las **variables visuales** y que el **ensayo** de la **conversión** y **tratamiento** entre registros establezca sin contradicciones una **relación** que le permita manipular las variables fundamentales, independiente del registro en que esté representado el objeto matemático, de manera que le facilite la construcción del concepto de ecuación.

ACTIVIDAD No 7

Continuando con la secuencia, esta actividad se orienta a fortalecer los conocimientos que el alumno ha adquirido en la medida que la secuencia avanza y muestre su comprensión del proceso en juego. Esta actividad tiene como objetivo que el alumno de sus conclusiones de las diferentes representaciones una vez que ha realizado conversión entre el registro algebraico al registro gráfico y viceversa, en relación al sentido de inclinación de dos ecuaciones aplicando procesos visuales.

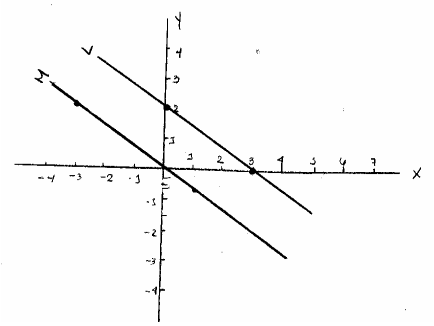
Como lo expresa Duval (2003) todas esas representaciones no parecen más que exigir un acto simple, directo y común de "ver". Significa que el alumno no solamente deberá enfocarse en dar una respuesta al problema en cuestión, sino, distinguir la forma de lo que la figura representa, como también identificar lo que cada forma representa, de manera que le proporcione al estudiante la información necesaria para resolver un problema de manera global.

La secuencia de esta actividad plantea dos problemas y una interrogante al respecto de los mismos.

En el primer problema se les facilita a los alumnos dos ecuaciones lineales $2x + 3y – 6 = 0$ y $4x + 6y = 0$, los alumnos deberán realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico y dar sus conclusiones al respecto. Para realizar la actividad se formaron grupos de dos estudiantes, el alumno Ángel desarrolló su trabajo solo, a diferencia de los grupos anteriores sus integrantes fueron rotados, la razón fue explorar la producción de cada uno de los compañeros en su nuevo grupo, en relación al conocimiento adquirido en las actividades anteriores.

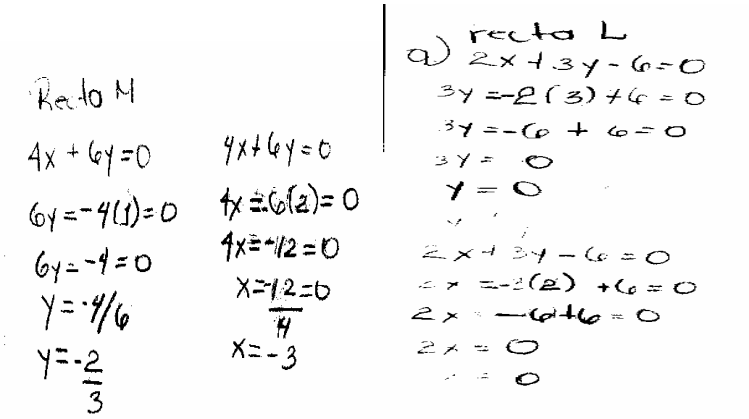
Respecto a Ángel, la idea fue investigar si al quedar solo en sus tareas, los demás alumnos mostrarían su independencia de criterio para realizar la actividad, lo anterior se debe a que Ángel ha demostrado un mejor conocimiento del objeto matemático en cuestión. Las respuestas fueron las siguientes:

En primer lugar del análisis, en los resultados se observó que el 56% de los alumnos contestó bien en cuanto a la conversión entre registros, para el caso de Saira su respuesta fue:

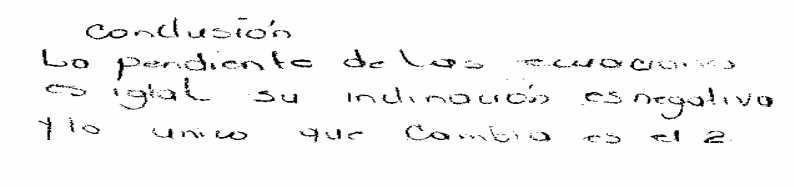


El paso de un registro al otro registro no parece presentar problema para este alumno, siendo su estrategia para desarrollar la ecuación en forma gráfica el tomar puntos del eje de la abscisa y sustituirlos en la ecuación, manifestando de esa manera su preferencia por la resolución algorítmica.

La justificación de Saira para la conversión del objeto al registro gráfico fue:



Ahora bien la conclusión a la que llegó Saira en base a su representación gráfica fue:

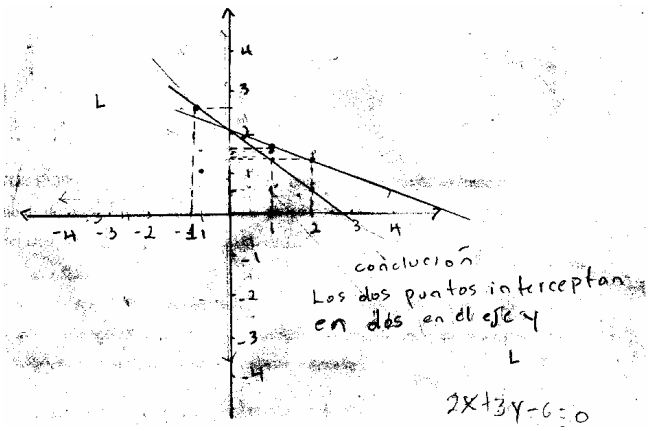


Es importante mencionar del análisis de Saira, donde hace referencia a la variable del sentido de inclinación en ambas rectas, visualizando que son iguales en función de su signo adyacente a la magnitud de la pendiente, la cual le proporciona la inclinación negativa; y además, la otra variable es el corte al eje, y concluye que éste cambia de una ecuación a otra.

En contraste al análisis de Ángel, él mismo desarrolla bien su pasaje entre registros, e incluso maneja la resolución del problema de forma algorítmica, manifestando una falta de criterio para dar sus conclusiones que en este caso no presentó ninguna.

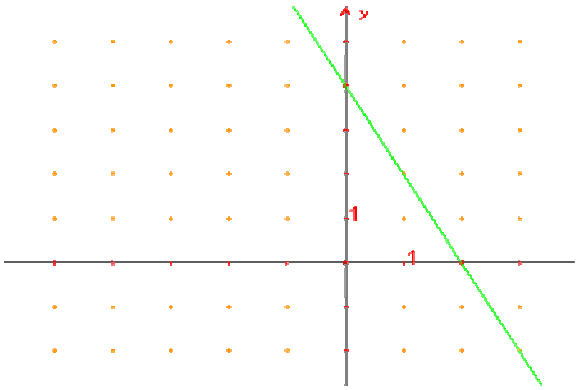
Un grupo de alumnos en sus resultados no presentan de manera alguna tener clara una estrategia de cómo realizar la conversión entre registros; y sus conclusiones se alejan del objetivo que esta secuencia propone mediante las actividades.

Una respuesta al respecto del párrafo anterior evidencia lo que se pretendía al rotar los integrantes de los grupos, y conocer si presentaban logros de conocimientos en la medida en que la secuencia se desarrolla, las respuestas al respecto fueron:



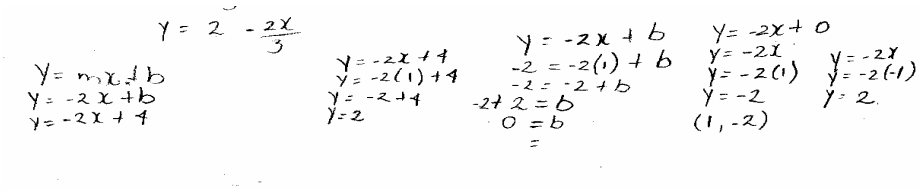
Es evidente el grado de dificultad que presenta Cesar en la conversión al registro gráfico, como también en sus conclusiones.

En el segundo problema se les dio una gráfica donde se representa una recta, y en función de la gráfica determinaran una ecuación que pase por el punto con coordenadas (1, -2) y que sea paralela a la recta de la gráfica.



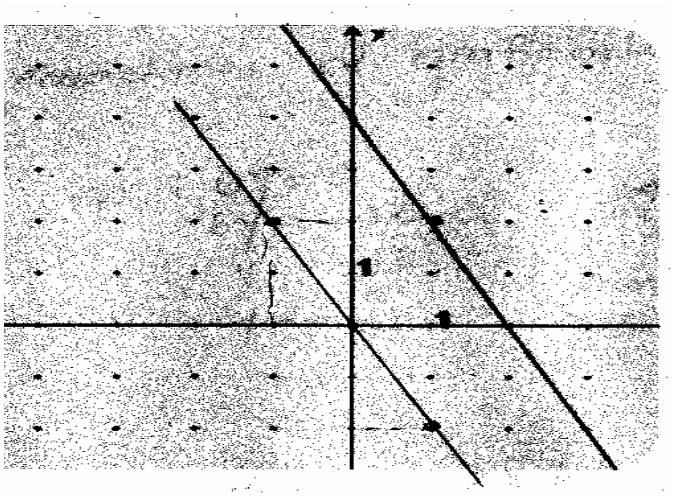
Las observaciones hechas a cada una de las respuestas de los alumnos en relación a este segundo problema, muestran que existe dificultad en la conversión del registro gráfico al registro algebraico, aún cuando la secuencia de esta actividad les proporcionó a los alumnos con el primer problema, herramientas necesarias para dar respuesta al problema.

La alumna Deisy y su compañera de grupo, sin embargo en su respuesta expresaron:



Comenzó planteándose la ecuación pendiente-ordenada al origen, determinó el sentido de inclinación de la pendiente como también el intercepto con eje y, ésta le permitió mantener el valor de la pendiente en el replanteamiento de la ecuación lineal, luego sustituyó el punto proporcionado en la ecuación nueva y despejó para el intercepto con el eje y.

El resultado de la representación gráfica de Deisy fue el siguiente:



El resto de los grupos algunos representaron la recta en el sistema de ejes de coordenadas pero no argumentaron su respuesta, otro grupo ni siquiera lograron graficar la recta.

En la pregunta del inciso c, el 100% de los alumnos no proporcionó conclusión alguna, queda evidenciado que los alumno prefieren el desarrollo algorítmico para dar respuesta a los problema matemáticos, y en consecuencia no le dan importancia al proceso visual como una herramienta poderosa para realizar conversiones entre registros.

En relación al párrafo anterior Eisenberg y Dreyfus citado por Hitt (1988), manifiestan que: *"existe un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, una de las causas posibles es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente; otra es que los profesores de matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual".*

Por lo que la actividad apunta de manera clara, ser una guía secuencial en la que los alumnos debieron apropiarse de las variables visuales que le permitieran resolver los problemas sin contradicción, como lo manifiesta Zimmerman y Cunningham al realizar el proceso visual éste les proporcionara profundidad y significado a la comprensión y la misma les sirva como una guía confiable para la resolución de problemas, e inspira razonamiento crítico.

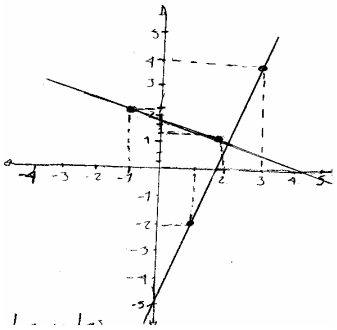
ACTIVIDAD No 8

Esta actividad al igual que la anterior, busca fortalecer el conocimiento cognitivo del estudiante, como también desarrollar la habilidad matemática del mismo, aplicando la práctica matemática de visualización y el pasaje entre registros.

Explorar si el alumno ha logrado identificar las variables visuales, que le permitan poder realizar una representación gráfica de una ecuación lineal, al mismo tiempo que esto lo asocie con el proceso visual de forma inversa; o sea, realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico.

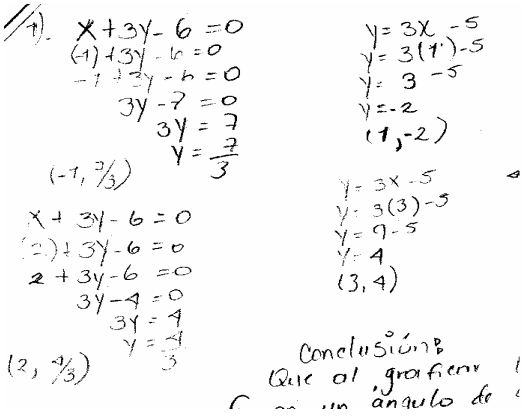
El primer problema presenta dos representaciones algebraicas de ecuaciones lineales, $x + 3y - 6 = 0$ y $y = 3x - 5$, los alumnos deben realizar el pasaje de éstas, al registro gráfico, y dar sus conclusiones al respecto. Las respuestas de este primer problema fueron:

El 89% de los alumnos pudo realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico, para el caso la alumna Deisy su respuesta del registro gráfico fue:



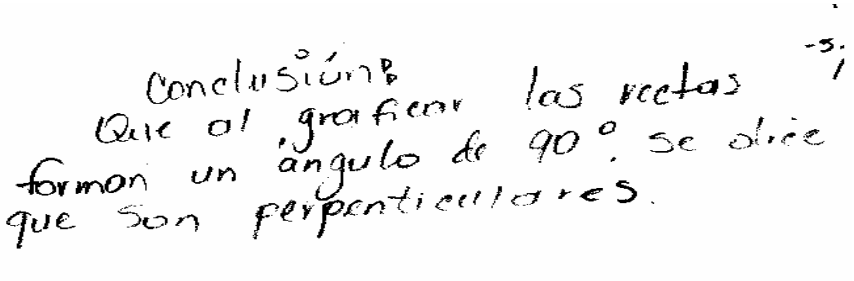
Podemos distinguir de la representación gráfica, la forma de las rectas, mismas que representan perpendicularidad, y además, se identifican de manera precisa las variables visuales; ya que este caso en particular, el sentido de inclinación cambia y la pendiente de una de las rectas es el recíproco de la otra.

La justificación de Deisy para el pasaje del registro algebraico al registro gráfico fue:



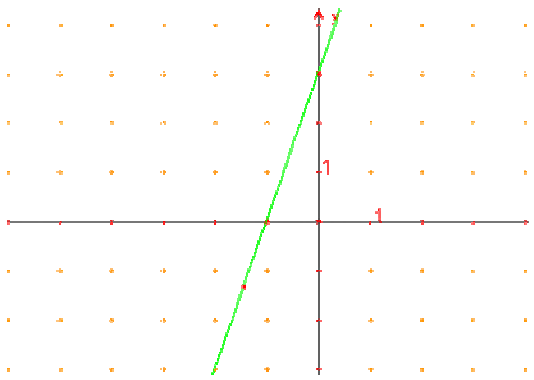
Lo anterior evidencia que los alumnos continúan utilizando el proceso algorítmico como herramienta en la resolución de los problema matemáticos. Esta preferencia quizá se deba a que el estudiante en su formación académica solamente se le presenten este tipo de resolución de problemas, lo cual les da seguridad en las respuestas, cuando se enfrenten a este tipo de problemas, olvidándose de lo sencillo, fácil y lógico de lo que es el proceso visual.

Las conclusiones a las que llegó Deisy y los demás estudiantes presentan ideas diferentes, pero que no se alejan de lo que se identifica en la representación gráfica.



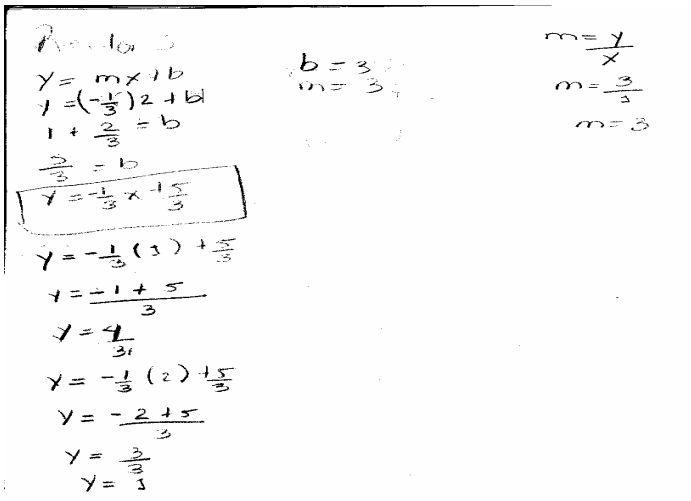
La conclusión de Deisy es correcta, pero además, de ello lo esperado era que las experiencias de la secuencia anterior le proporcionarán una base para identificar el sentido de inclinación, de manera que distinguiera el comportamiento de la pendiente en ambas rectas, como también la posición con el eje *y*.

En el segundo problema se les proporcionó una representación gráfica de una recta y se les pedía que determinaran otra recta que pasara por el punto (2, 1) y fuera perpendicular a la recta dada.

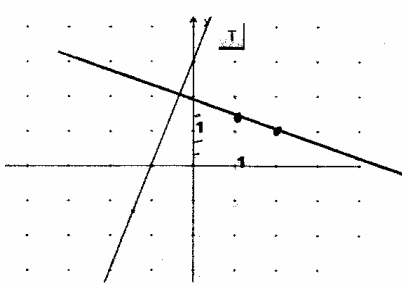


Todos los alumnos presentaron problemas para realizar el pasaje del registro gráfico al registro algebraico, solamente las alumnas Saira y Kristabell presentaron una respuesta correcta así:

La justificación presentada por Saira para realzar la representación gráfica fue:



La respuesta de Saira del registro gráfico fue:

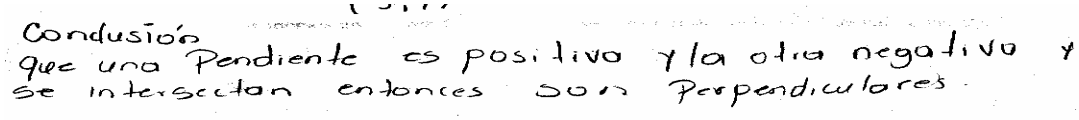


Saira primero cálculo la pendiente de la recta dada, utilizando la elevación de la misma que intercepta el eje *y* en el punto 3, luego se desplazó sobre el eje *x*, desde el origen al punto –1, lo que le permitió determinar una razón igual a –3, que en este caso ella la tomó como positiva debido al sentido de inclinación de la recta.

Es evidente que Saira tiene claro el comportamiento de la pendiente, ya que al sustituirla en la fórmula punto-pendiente la cambió por el reciproco de 3 y le cambió el signo a no positivo, lo que le facilitó representar la ecuación lineal que calculó en el registro gráfico.

En la pregunta 3, el 90% de los alumnos no expresaron ninguna conclusión que manifieste que la actividad les dejó claro los conceptos para la cual se diseñó, lo que sí queda evidenciado, es que los alumno prefieren el desarrollo algorítmico para dar respuesta a los problema de matemáticas.

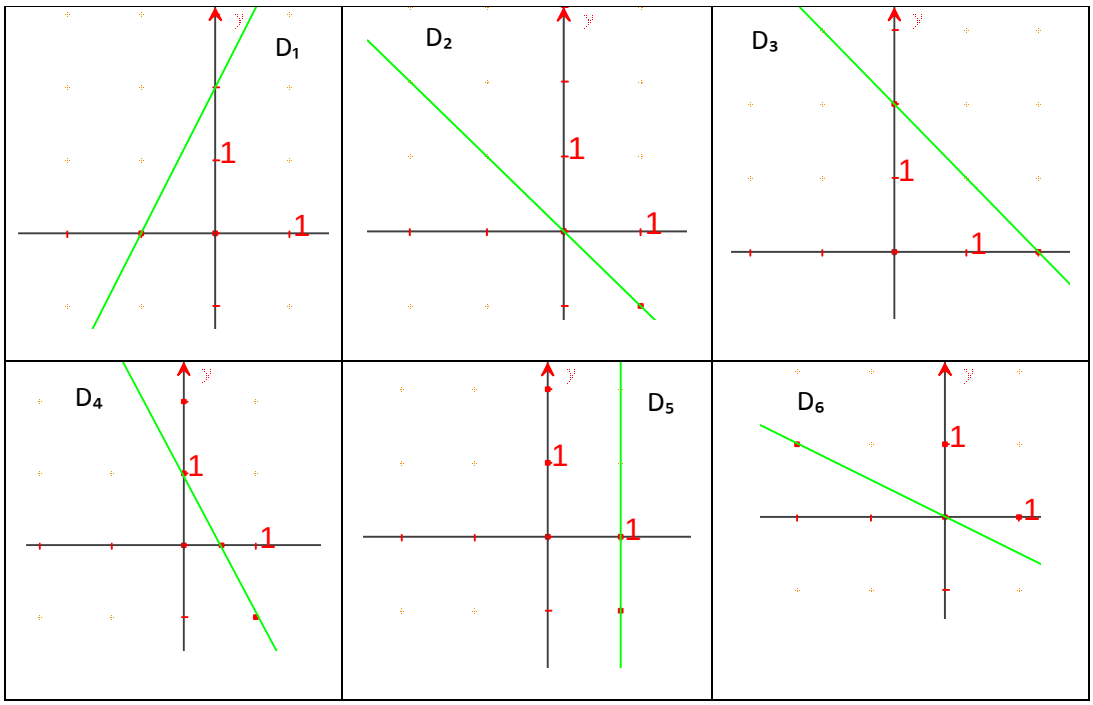
Saira expresa en su conclusión lo siguiente:



La conclusión de Saira le falta más argumentación que le de soporte a su afirmación, por que el hecho de que se intercepten en un punto no necesariamente las restas son perpendiculares, ya que existen otros factores que las definen como tales, y como lo expresa Duval (1993)…es necesario identificar en el registro gráfico las variables pertinentes con sus diferentes valores y, en la escritura algebraica de una relación.

ACTIVIDAD No. 9

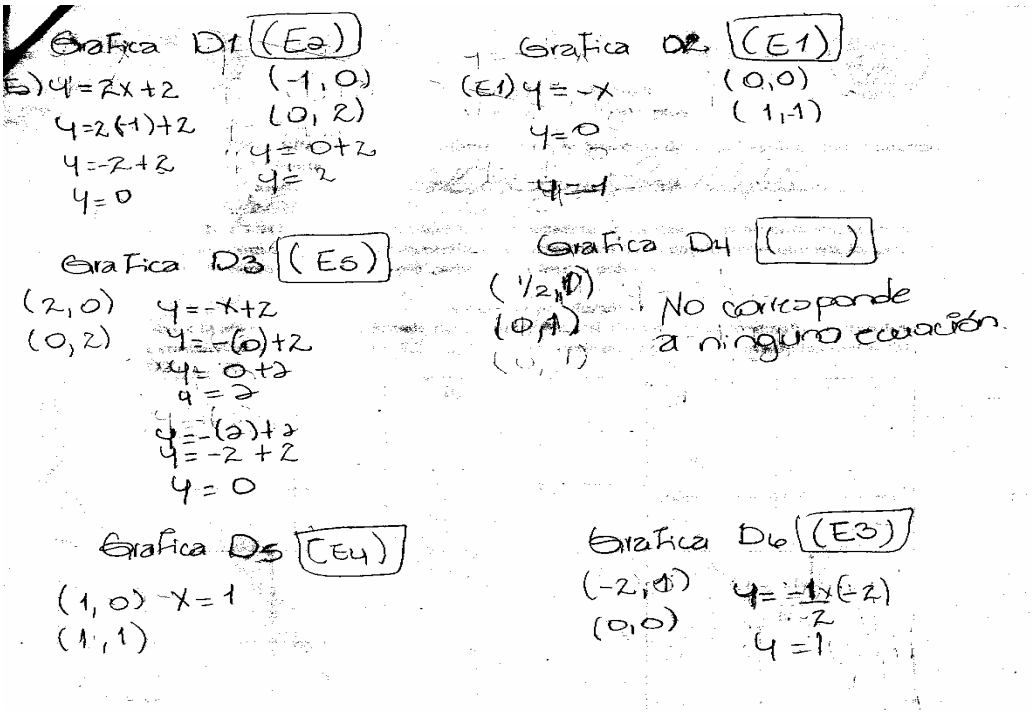
La actividad tiene como propósito que los alumnos pongan en práctica los conceptos que les permitieron seguir la secuencia, en este caso haciendo prioridad en el proceso de visualización. La situación problemática de esta actividad consiste en proporcionarles a los estudiantes una serie de representaciones gráficas y una serie de representaciones algebraicas, los alumnos deberán identificar qué expresión algebraica corresponde a cada recta que se representa en los diferentes registros gráficos.



E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
y = -x	y = 2x + 2	$y = -\frac{1}{2}x$	x=1	y= -x + 2	y = x	$y = \frac{1}{2}x + 1$	y = -2x	y = x +1

Las respuestas presentadas por los estudiantes fueron las siguientes:

El 50% de los estudiantes acertaron en las seis representaciones, como los muestra la alumna Kristabell en su respuesta:



Observamos que Kristabell para seleccionar su gráfica, se asegura de que la respuesta sea correcta recurriendo al proceso algorítmico para obtener los pares ordenados que estén contenidos en la recta, el caso particular de la gráfica D4 seleccionó muy bien los pares ordenados y la respuesta fue contraria a lo que se le pedía ya que del registro gráfico visualizó que no correspondía a ninguna ecuación sin realizar ningún cálculo.

Tres de los alumnos acertaron en cinco de las representaciones pero en caso de la gráfica D4 no pudieron dar una conclusión al respecto. Algo muy importante que mencionar es el hecho de que ninguno de ellos fracasó en la selección de sus gráficas.

Lo importante de esta actividad y que se debe resaltar es el hecho de que los alumnos realizaran un reconocimiento de las variables visuales, de manera tal que les permitiera descubrir las propiedades de las figuras de forma integral y al tiempo que se ejecutaran tareas de reconocimiento que articularan ambos formas de representación del objeto matemático.

Duval (1988, pág. 131) hace referencia a lo anterior en el sentido de que “El conjunto trazo-ejes forma una imagen que representa un "objeto" descrito por una expresión

algebraica. Toda modificación de esta imagen que extrañe una modificación en la escritura de la expresión algebraica correspondiente determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica"

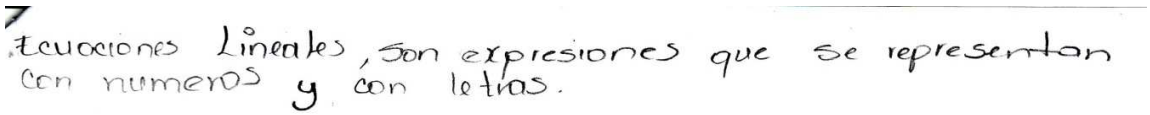
En otras palabras lo que Duval señala, es que el alumno mediante este tipo de problemas se dé cuenta de la importancia del proceso visual, ya que al observar la expresión algebraica de la forma $y = ax + b$ y al tiempo que la misma se compara con la expresión gráfica, estas sufren modificaciones, si el coeficiente *a y* la constante *b* también cambia, de manera que el estudiante pueda sin confusión dar respuesta a cualquier problema que implique una ecuación lineal con dos variables.

ACTIVIDAD No. 10

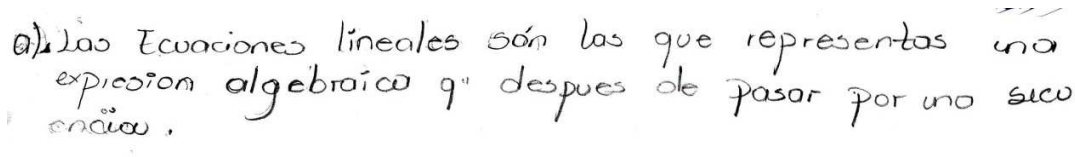
Esta actividad tiene como objetivo integrar todas las actividades de la secuencia, para explorar si el alumno logró construir el concepto de lo que es una ecuación lineal, y demuestre que los conceptos de visualización y la teoría de representaciones semióticas son herramientas que le permiten con facilidad la resolución de problemas.

Para realizar esta actividad se les plantearon a los estudiantes una serie de situaciones problemas, la primera interrogante fue ¿Explica que entiendes tu por ecuaciones lineal con dos variables después de pasar por la secuencia anterior?

Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta fueron diversas y no coincidentes, para el caso la alumna Deisy expresó lo siguiente:


Ecuaciones lineales, son expresiones que se representan con numeros y con letras.

Otra definición del concepto de ecuaciones lineales fue la expresada por Elsy:

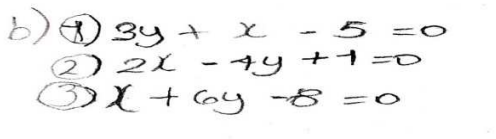

a) Las Ecuaciones lineales són las que representas una expresion algebraica q" despues de pasar por una secuencia.

Estas dos definiciones son la que manifiestan, que a diferencia de lo expresado por los otros alumnos, la relación de la definición de ecuaciones lineales como una expresión algebraica, discriminando la igualdad, que significa pues, la afirmación de que dos expresiones son iguales.

Posiblemente lo anterior se deba a que el docente le dé prioridad al desarrollo algorítmico sin pasar por la definición en cuestión en un contexto de resolución de problemas, lo cual es aceptable, pero sumado a lo anterior al final del proceso de cada tema visto, se le debe inculcar al alumno que por sí solo contextualice el tema en cuestión, que le permita descubrir la articulación entre la teoría y la práctica.

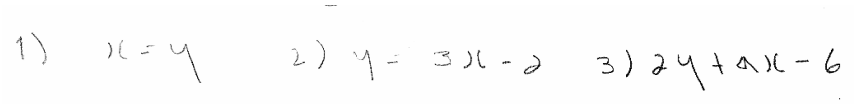
En la segunda pregunta se le pide al alumno que plantee tres ejemplos de ecuaciones lineales que él considere pertinente.

El 100% de los alumnos respondieron muy bien a esta pregunta, para el caso la alumna Deisy su respuesta fue:



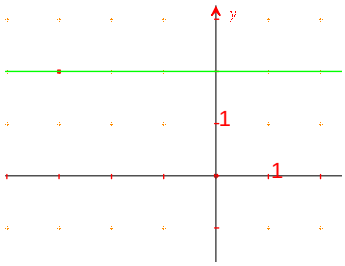
La definición que tiene Deisy de las ecuaciones lineales se manifiesta en esta respuesta donde expresa que las mismas son expresiones de números y letras, en este caso utiliza la fórmula de una ecuación lineal general.

Otra respuesta a esta pregunta fue la de Ángel:



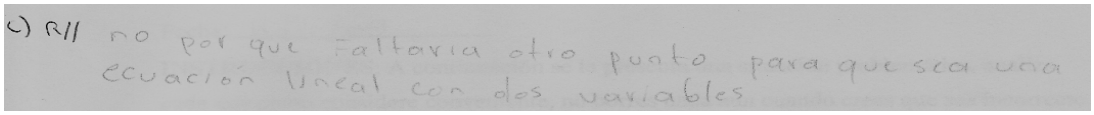
En el caso de Ángel, él utiliza la fórmula de pendiente-ordenada al origen, sin embargo, en su respuesta de la definición del concepto de ecuaciones lineales, la misma no refleja lo que es la expresión algebraica, evidentemente la falta del uso de varias representaciones en el aula limita al estudiante percibir la importancia de la formación de conceptos.

La tercera pregunta de esta actividad es ¿Representa la recta de la gráfica una ecuación lineal con dos variables?

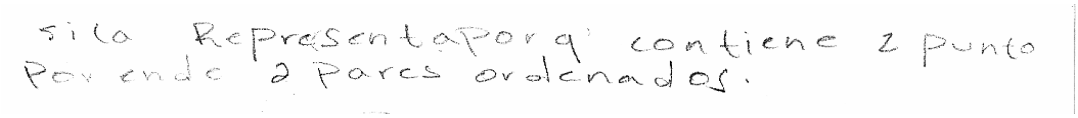


Las respuestas a esta pregunta fueron las siguientes:

La respuesta de Cesar fue:



La respuesta de Ángel fue:

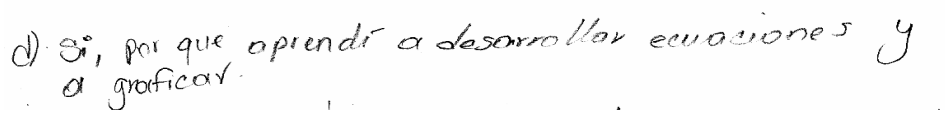


Las respuestas anteriores muestran lo que Duval (Idem) afirma que para la ecuación de la recta, lo que importa en la escritura $y = ax + b$, es el coeficiente a y la constante b, en este caso en particular la recta es paralela al eje de la abscisa lo que hace que la variable desaparezca, no así las imágenes para el valor de la ordenada, significa que visualizar la gráfica es significativo, si los alumno pensaran en que un par ordenado es un método de solución de problemas de matemáticas, como también el tener claro las propiedades de las variables visuales.

Los demás estudiantes contestaron que si, era una ecuación con dos variables, pero no presentaron ninguna argumentación al respecto.

La cuarta pregunta fue ¿Consideras que la secuencia didáctica anterior representó un aprendizaje del concepto de ecuaciones lineales con dos variables?

La respuesta a esta pregunta por parte de la alumna Deisy fue:

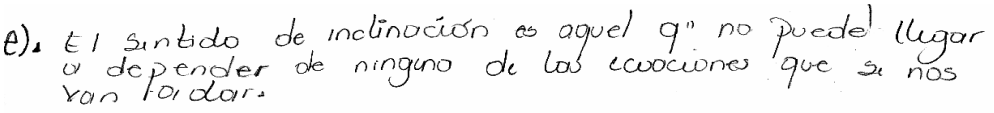


Las demás respuestas a esta pregunta son variadas, quizá lo anterior se deba a que el alumno no maneja un adecuado lenguaje común, como tampoco un lenguaje matemático, además de lo anterior, las respuestas expresan la prioridad que tiene el estudiante por la resolución de un problema de forma algorítmica, o sea que además que se les proporcione una definición, ésta no se toma en cuenta cuando se trata de dar respuesta a los problemas que les plantean.

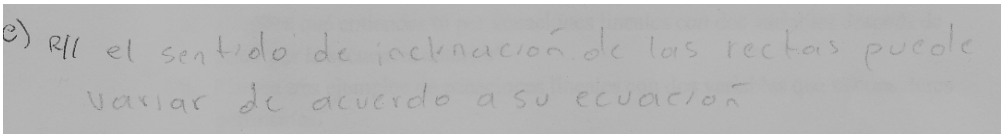
La quinta pregunta consiste en ¿A qué conclusión puedes llegar acerca del sentido de inclinación de la recta de una ecuación lineal?

Las respuestas a esta pregunta la analizaremos en dos casos de diferentes alumnos así:

La respuesta de la alumna Elsy fue:



Y la repuesta de Cesar fue:



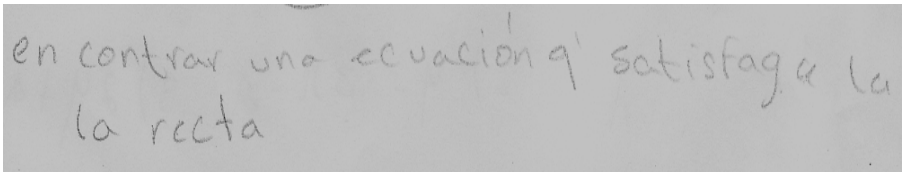
Las respuestas hacen mención únicamente a las ecuaciones, en relación a que el sentido de inclinación depende de las mismas, pero ambos estudiantes en ningún momento hacen referencia a las propiedades de las variables visuales.

Lo anterior se debe a que el estudiante le falta entender la vinculación que debe existir al realizar pasajes entre los registros de representación; o sea que todavía los alumnos no presentan claridad de las unidades significantes propias de cada registros, en este sentido

Duval (1993) es claro al afirmar que … es necesario identificar en el registro gráfico las variables pertinentes con sus respectivos valores y, en la escritura algebraica de una relación, las diferentes oposiciones paradigmáticas que dan una significación, y no solamente un objeto, a los símbolos utilizados.

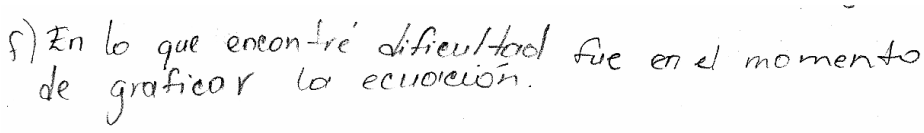
La pregunta del inciso f se refiere a ¿De la experiencia anterior que consideras fue la parte de la secuencia que representó mayor dificultad para ti en su desarrollo?

Las respuestas de esta pregunta también son diferentes entre alumnos, para el caso el alumno Ángel contesto:



Significa que para Ángel su dificultad es realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico, como también realizar tratamiento entre un mismo registro, a lo largo de la secuencia, se observó que esta actividad representó en general un obstáculo para que el alumno proporcionara una respuesta clara en la resolución de los problemas planteados.

Otra respuesta fue la proporcionada por Deisy así:



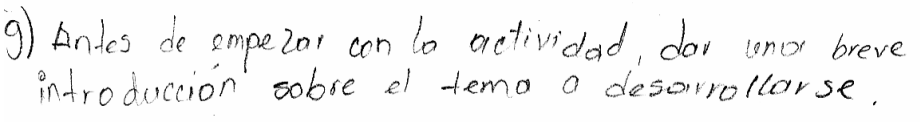
La dificultad de Deisy se presentó en el pasaje del registro algebraico al registro gráfico, las actividades que desarrolló Deisy muestran que a lo largo de las mismas se apropió de la búsqueda de pares ordenados para poder graficar las rectas.

Los otros estudiantes presentaron respuestas similares a las anteriores. La secuencia presentó en este sentido mayor obstáculo por parte del alumno, cuando se realizaba la conversión de una representación gráfica a una representación algebraica.

La pregunta del inciso g fue ¿Qué cambios deberían realizarse en la secuencia anterior, según tu criterio, para que el aprendizaje sea significativo?

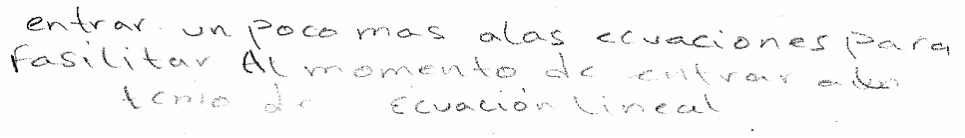
Los mismos alumnos Deisy y Ángel presentan respuesta similares de la siguiente manera:

Para el caso Deisy expresa:



Lo que Deisy plantea es que se desarrolle previo a comenzar la actividad una clase sobre el tema en cuestión, lo que violentaría el contrato didáctico donde Brousseau (1988), expresa,…hay que evitar dar “recetas” que permitan llegar a la “solución, ya que tienden a descargar al alumno de la responsabilidad fundamental de control de su trabajo intelectual, bloqueando por lo tanto la devolución del problema, lo que hace a menudo fracasar la actividad. El estudiante debe construir el significado de las nociones a partir de un conjunto de problemas en donde tal noción funcione de manera más o menos local.

La respuesta de este inciso para Ángel fue la siguiente:



Esta respuesta es similar a la de Deisy, sin embargo Brousseau (1988, pág. 322) continua manifestando que el objeto final del aprendizaje es que el alumno pueda hacer funcionar el saber en situaciones en las que el profesor no está presente. Además de lo anterior, la idea principal es que el alumno construya el concepto en cuestión y no que sea el docente que efectué la comunicación de un conocimiento, porque la secuencia de las actividades no tendría razón de ser.

Las respuestas de ambas alumnos expresan la dificultad a la que se enfrentan de manera constante los estudiantes en la resolución de problemas de matemática, por lo que la secuencia didáctica debe permitir la articulación de los conocimientos previos y los que la misma propone de manera que se contextualice el conocimiento para que el aprendizaje del objeto en cuestión sea significativo.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

La secuencia didáctica que se desarrolló en este trabajo permitió de manera intuitiva lograr un acercamiento a la construcción del concepto de ecuaciones lineales con dos variables, siendo lo central del diseño para llevar a cabo la secuencia de las actividades de enseñanza, la selección del objeto matemático en cuestión, cuya finalidad fue

proporcionarle al estudiante el desarrollo matemática y el cognitivo, articulando con las diferentes teorías e investigaciones en torno al objeto matemático.

Las respuestas proporcionadas por los estudiantes en la medida que las tareas fueron desarrolladas muestran que los mismos tienen una idea intuitiva sobre el concepto de ecuaciones lineales con dos variables, idea que los condujo a afirmar que el objeto en cuestión es una expresión de números y letras, lo cual es coherente si articulamos lo expresado en el lenguaje natural con las expresiones algebraicas y su gráficas.

Esto se puede explicar, por la razón de que el alumno utiliza un proceso con énfasis de instrucción algebraico, lo que evita que el estudiante piense en el desarrollo conceptual, que le permita construir representaciones semióticas para la resolución de problemas de carácter personal, al tiempo de poder comunicar a otros.

La situación didáctica proporcionó los medios de diferentes representaciones, de manera que el estudiante se diera cuenta que el objeto se puede representar en diferentes registros e incluso haciendo tratamientos sobre los mismos, la problemática de las tareas hicieron variar de manera sistemática una representación, que al mismo tiempo hace cambiar el contenido representado; sin embargo, la preferencia por parte de los alumnos se manifestó por las representaciones algebraicas, que aun sin tener la habilidad de su manipulación para dar respuesta a las tareas, la misma les proporciona de manera clara un camino para la resolución de problemas.

La aprehensión de las representaciones semióticas que los alumnos manifestaron a través de la secuencia los acerca sin duda alguna a favorecer la discriminación de las unidades significantes en el registro mismo donde la representación se produce, es por ello que los estudiantes manifiestan su preferencia por los registros algebraicos, donde su estrategia para la conversión al registro gráfico fue la formación de pares ordenados que les permitieron trazar una recta que contenía dichos puntos, esta aprehensión resulta de un simple planteamiento cognoscitivo de control sin que el estudiante haya logrado una compresión total de su representación.

El hecho de que el estudiante no presentó una estrategia que le diera claridad y seguridad para realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico se debe a la falta de coordinación que el alumno tiene sobre los mismos, y el desconocimiento de reglas de codificación que le permitan una interpretación global de la representación que se le plantea.

Lo anterior condujo al estudiante a cometer errores tales como el desconocimiento de un par ordenado, no solo que variables lo forman sino como ubicarlo en el sistema de ejes coordenados, el sentido de inclinación de la recta, el intercepto al origen, los ángulos con los ejes, por la falta de visualización, de interpretación de las unidades significantes de manera global, que le permitiera desarrollar tanto la habilidad matemática como cognoscitiva, la no coordinación entre la relación del un registro algebraico, gráfico y viceversa les permiten estos errores en la distinción de los valores visuales de la forma y orientación de la gráfica, valores oposicionales y no puntos numéricos y relacionarlos con la escritura algebraica, desde el punto de vista de Duval la aprehensión global le da a la representación gráfica su poder intuitivo o heurístico.

La complejidad de la tarea de conversión del registro gráfico al algebraico es evidente, y así fue manifestada por los estudiantes en sus tareas presentadas en la secuencia didáctica, ya que requiere de una mayor actividad cognoscitiva.

La secuencia de aprendizaje constituyó actividades sucesivas que permitieron que el alumno realizara diferentes tareas que no provocaran en ellos desviaciones significativas del tema en cuestión, sino, más bien que todos ellos pasaran por los mismos problemas y poder explorar en sus distintas formas de afrontar estrategias que les permitieran dar respuestas a sus tareas.

Los estudiantes no utilizan la visualización como una herramienta en la resolución de problemas, una razón a lo anterior se deba quizá a que la instrucción que los alumnos reciben en clase por parte de los maestros en la resolución de problemas sea de prioridad algorítmica, lo que conduce a que el alumno no desarrolle habilidades cognitivas, las cuales articulan con el descubrimiento, curiosidad y imaginación creativa. Lo que sí

quedó evidenciado es la visualización icónica en la determinación de la pendiente de una recta en un registro gráfico siendo la elevación sobre el eje *y* el valor visual principal.

5.2 Recomendaciones

1. A los docentes mejorar la instrucción de enseñanza de la matemática, ya que constantemente se hacen representaciones de objetos matemáticos en las aulas de clase bajo una sola dirección, lo cual permite al alumno obtener una aprehensión parcial de control de su aprendizaje.

2. Mejorar la instrucción de enseñanza, articulando los diferentes registros de representación con los diferentes tipos de visualización y con ello darle mayor profundidad a la actividad cognoscitiva.

3. Este trabajo de tesis queda abierto para realizar actividades que comprenden la coordinación y fenómenos relacionados con la no-congruencia entre representaciones del registro gráfico, algebraico al registro verbal, o sea que debería existir una mayor presencia del lenguaje natural en la instrucción del docente y del estudiante.

4. En la medida de la importancia que se le preste al proceso de visualización, como una herramienta para la discriminación de las unidades significativas en una ecuación lineal. En esa medida se podrán realizar las tareas de conversión entre registros.

5. El uso del recurso tecnológico no se implemento en este trabajo, pero la investigación presenta las bases para realizar otra tesis bajo este mismo concepto en donde la tecnología sea utilizada como una herramienta de la enseñanza de la ciencia y particularmente de las matemáticas. De manera que se puedan modelar las representaciones en sus diferentes registros, lo que permitirá potencializar la visualización de las variables visuales.

6. Mejorar el desarrollo del pensamiento conceptual y de instrucciones en los maestros, para que la transmisión de conocimientos en las aulas de clase tenga

como propósito potencializar el desarrollo operatorio, de comunicación y de descubrimiento por parte del estudiante, como consecuencia en el aprendizaje de la matemática el alumno pueda manipular sin contradicciones, de forma coherente la articulación de lo diferentes registros de representación semióticas, donde se requiere que el maestro plantee problemas creativos, más allá de lo que un libro de texto presenta, que estimulen al alumno a enfrentarse a problemas que admitan la noción matemática y su desarrollo cognitivo.

BIBLIOGRAFIA

Benítez, D.; Santos, M. (2000). El uso espontáneo de representaciones y la importancia de las estrategias metacognitivas para el entendimiento y resolución de problemas. En F. Hitt y A. Hernández (Eds.). Experimentaciones en Educación Matemática en los niveles Medio Superior y Universitario. (págs. 151-166).

D′Amore, B.; Godino, J. Font, V. (2007). La dimensión meta didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Cantoral, R.; Montiel, G. (2001). Visualización y pensamiento matemático. Área de educación superior del Departamento de Matemática Educativa Educación Superior Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Chavarría, J. (2006). Teoría de situaciones didácticas. Este texto es una trascripción editada de una conferencia impartida por la profesora Jesennia Chavarría, el 25 de marzo del 2006 en un *Seminario Teórico*. La trascripción y edición de la misma fue realizada por los estudiantes de la Universidad Nacional de Costa Rica: Daniela Araya y Diego Soto. La edición final fue realizada por la autora.

De Guzmán, M. (1996). El rincón de la pizarra. Pirámide, Madrid

De la Rosa, A. (2000). El concepto de función en secundaria: conocer el grado visualización de funciones lineales en el alumno. En F. Hitt y A. Hernández (Eds.), Experimentaciones en Educación Matemáticas en los niveles Medio Superior y Universitario. (págs. 43-54)

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Universidad del valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática (págs. 25-71)

Duval, R. (1999). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo. (págs. 21- 95).

Duval, R. (2003). "ver" en Matemáticas. En E. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, A. Rivera y S. Ursini (Editores), Matemática Educativa, aspectos de la investigación actual. Fondo de Cultura Económica, México. (págs. 41 – 76)

García, D. (2000). Conversión entre representación graficas algebraicas. En F. Hitt y A. Hernández (Eds.), Experimentaciones en Educación Matemática en los niveles Medio Superior y universitario. (págs. 55- 57).

Hitt, F. (2000). Desarrollo de habilidades matemáticas y construcción de conceptos versus perdida de habilidades matemáticas. En F. Hitt y A. Hernández (Eds.), Experimentaciones en Educación Matemáticas en los niveles Medio Superior y Universitario. (págs. 79- 94).

Hitt, F. (2003). "El carácter funcional de las representaciones". Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 8, págs.255-271.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Departamento de Matemáticas Educativa del CINVESTAV – IPN.

Hoyos, V. (1998). Revisitando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas: Observaciones empíricas con estudiantes de 16 – 18 años de edad. En F. Hitt (Eds.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* (págs. 343-362). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Ibañez, M.; Fúnez, H. Egüez, R. (s.f). Un Acercamiento a la Visualización en el Cálculo. Facultad de Ciencias Naturales. CIUNSA. Universidad Nacional de Salta Argentina.

Legorreta, C.; Andalón, J. ( ). La visualización como Estrategia de Estudio en el Concepto de Dependencia e Independencia Lineal. Centro de Investigación en Ciencias Aplicadas Tecnología Avanzada del IPN

Machin, M.;Gonzales-Martin, A. (2005). La integral impropia. Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza. Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza. Editores José Carlos Cortes y Fernando Hitt. Departamento de análisis matemáticos, universidad de la laguna (Isla Canarias, España). Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo.

Panizza, M.; Sadovsky, P. y Sessa, C. (1996). Los primeros aprendizajes algebraicos: El fracaso del éxito.

Panizza, M.; Sadovsky, P. y Sessa, C. (1997). La ecuación lineal con dos variables: entre Unicidad y el Infinito.

Planchart, O. (2005). La Modelación Matemática: alternativa didáctica en la enseñanza de Precalculo.

Tapia, J.; Olmos, S.; Monteverde, A. (2000, 2001). El Papel de los Registros de Representación Semióticos en la Enseñanza del Cálculo Diferencial. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. México.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: Una Secuencia Didáctica. Relime Vol.7, Número1, Marzo 2004. (págs. 49-78)

Schoenfeld, A. (2000). Propósitos y métodos de investigación en Educación Matemática *Notices of the AMS.* Volumen 47, Número 6. Traducción Juan D. Godino.

Tapia, B. Elena, S. Olmos, I. María, J. y Grijalva, A. (2001-2002). Proyecto. "El papel de los registro de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial".

Viveros, K. (2000). Estudio de las concepciones de los estudiantes, de primer semestre de Ingeniería, sobre la diferencial de una función en un punto, usando diferentes registros de representación. En F. Hitt y A. Hernández (Eds.). Experimentaciones en Educación Matemáticas en los niveles Medio Superior y universitario. (págs.167-176).

ANEXOS

PRUEBA DIAGNOSTICO

OBJETIVO ESPECIFICO: Determinar qué estrategias utilizan los alumnos para resolver problemas y la noción que ellos tienen del concepto de ecuaciones lineales con dos variables.

Nombre del Alumno: _____

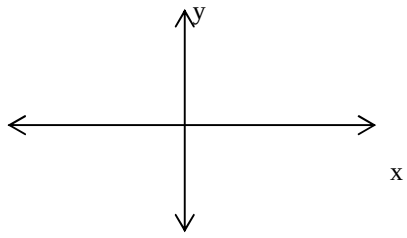
Fecha: _____

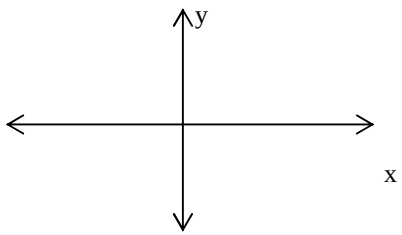
INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta una serie de problemas, desarrolla cada uno como creas conveniente, no borres nada de lo que hagas aún cuando creas has equivocado. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada.

1. En los salones de clases, donde se imparte la asignatura de matemática, se define la noción del concepto de ecuación lineal

   a) ¿Qué entiendes tú por esa noción?

   b) ¿puede proporcionar dos expresiones algebraicas de ecuaciones lineales y sus correspondientes gráficas?

Expresión algebraica:	Gráfica: 

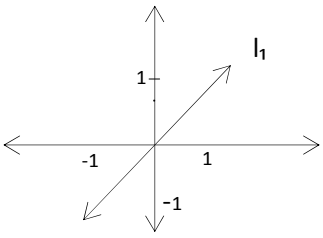
Expresión algebraica:	Gráfica: 

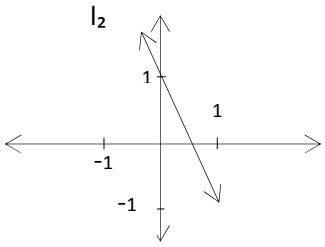
2. Se le proporcionan dos graficas en el plano cartesiano, responda lo que a continuación se le pide.

   a) Determine la pendiente en cada gráfica y justifique su respuesta.

   b) Cuál es la ordenada al origen (o su intercepto) de cada una de las gráficas.

   c) Escriba algebraicamente la ecuación de las rectas l_1 y l_2 para cada gráficas





3. Se le presentan tres tablas con valores correspondientes a expresiones algebraicas. Su objetivo es determinar cuál de ellas corresponde a una ecuación lineal con dos variables y justifique el por qué es una ecuación lineal.

x	y		x	y		x	y

-2	5		-2	-3		-2	-8
-1	2		-1	-1		-1	-1
0	1		0	1		0	0
1	2		1	3		1	1
2	5		2	5		2	

ACTIVIDAD No. 1

Sentido de inclinación de la recta

OBJETIVO ESPECIFICO: explorar acerca del sentido de inclinación que tienen los estudiantes de matemática I en torno a la recta.

Nombre del alumno:_____

Fecha:_____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta un problema y cuatro preguntas, desarrolle cada uno como considere conveniente, no borres nada aún cuando creas que sea incorrecto. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada.

a. Determine el sentido de inclinación de las rectas L, M, N y T que tiene el mismo punto (2, 3), dibujando cada una de ellas en un mismo sistema de coordenadas:

L:	P = (2, 3)	Q = (-1, -2)
M:	P = (2, 3)	Q = (3, -1)
N:	P = (2,3)	Q = (5, 3)

T:	P = (2,3)	Q = (2, 5)

b. Si el sentido de inclinación de la una recta es hacia arriba, de izquierda a derecha, la pendiente de esa recta es:

☐ Positiva. ☐ Negativa

c. Si la inclinación de una recta es hacia abajo, de izquierda a derecha, la pendiente de esa recta es:

☐ Positiva ☐ Negativa

d. Si la inclinación de una recta es horizontal, su pendiente es:

☐ Positiva ☐ Negativa

☐ Cero ☐ No definida

e. Si la inclinación de una recta es vertical, su pendiente es:

☐ Positiva ☐ Negativa

☐ Cero ☐ definida

ACTIVIDAD No 2

Visualización de los conceptos

OBJETIVO ESPECIFICO: Explorar qué noción tienen los alumnos del concepto de pendiente de una recta.

Nombre del alumno: _____

Fecha:_____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan dos problemas, desarrolla cada uno como considere conveniente, no borres nada aún cuando creas que sea incorrecto. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada.

a. Dibuje las gráficas en sistemas coordenados individuales de cada grupo y además ¿Qué conclusiones puede hacer en relación a la pendiente de las rectas que dibujaste?

Grupo # 1	Grupo # 2
y = 0	y = 0
y = ½ x	y = -½ x
y = x	y = -x
y = 2x	y = -2x
y = 6x	y = -6x

b. Dibuje la grafica de la recta que pasa por el punto (3, 2) y tiene pendiente

a) 3/4 b) $-\frac{4}{3}$

ACTIVIDAD No 3

Aplicación de pasaje de registros

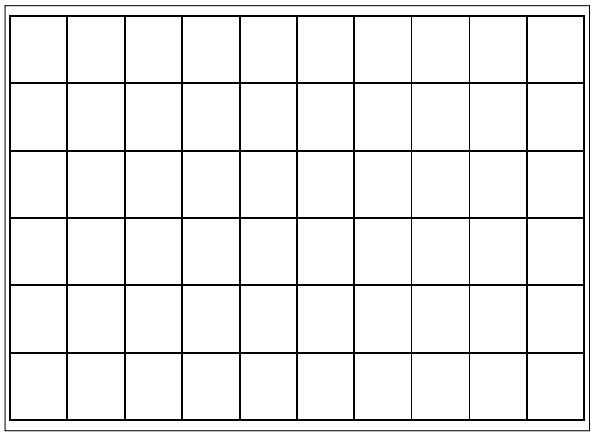
OBJETIVOS ESPECIFICOS: explorar qué tipo de estrategias utiliza el alumno al pasar de una representación a otra en las ecuaciones lineales.

Nombre del alumno:_____

Fecha:_____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan tres problemas, desarrolla cada uno como considere conveniente, no borres nada aún cuando creas que sea incorrecto. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada

a. Dibuje la gráfica de la recta que pasa por los puntos (3,2) y (3, -2) y verifique si su sentido de inclinación es:
   Vertical ☐ Horizontal ☐
b. Dibuje la gráfica de la recta que pasa por los puntos (2,2) y (-1, 2). y verifique que su sentido de inclinación es:
   Vertical ☐ Horizontal ☐
c. De los incisos anteriores a) y b) dibuje en un solo plano de un sistema de ejes coordenados las rectas y determine:
   c.1 El punto coordenado de intercepción de ambas rectas. ( )
   c.2 La ecuación de cada recta.



ACTIVIDAD No 4

Pasajes de registros

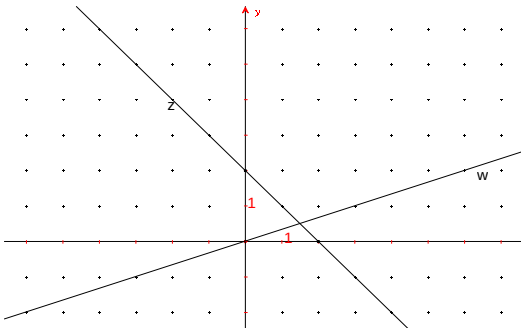
OBJETIVOS ESPECIFICOS: explorar si el estudiante logra mediante procesos de visualización, realizar tratamientos y conversión de los objetos propuestos.

Nombre del alumno:_____

Fecha:_____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan tres problemas, desarrolla cada uno como considere conveniente, no borres nada aún cuando creas que sea incorrecto. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada.

1. Determina la ecuación de las rectas Z y W, si la gráfica es:



2. Sea el punto (1, 3) en el sistema de ejes coordenados, determine dos ecuaciones que pasen por dicho punto.

3. Si ahora el punto aparece en la posición (-2, 3), el cual está contenido en la ecuación de la recta $y = -x + 1$, determine otra ecuación que contenga a dicho punto.

ACTIVIDAD No 5

Procesos de Visualización entre registros

OBJETIVOS ESPECIFICOS: que el alumno de matemática I describa cómo realiza actividades de conversión entre una representación algebraica y una representación gráfica.

Nombre del alumno:_____

Fecha:_____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan dos problemas, desarrolla cada uno como considere conveniente, no borres el desarrollo que realices. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada.

a. En un mismo sistema de coordenadas « representa» gráficamente las siguientes ecuaciones lineales.

   $y = 2$

   $y = x + 2$

   $y = -x + 2$

   $y = 3x + 2$

   $y = -3x + 2$

   ¿Qué puedes concluir de las rectas que tienen la forma $y = m x + 2$ con relación a las gráficas que representaste?

b. En un mismo sistema de coordenadas representa gráficamente las siguientes ecuaciones lineales.

   $y = 2x$

   $y = 2x + 1$

   $y = 2x – 1$

   $y = 2x + 4$

   $y = 2x - 4$

   ¿Qué puedes concluir de las rectas que tienen la forma $y = 2x + b$ en la relación a la gráfica que dibujaste?

ACTIVIDAD No 6

Utilización de los registros de representación.

OBJETIVOS ESPECIFICOS: Identificar si los alumnos realizan tratamiento y conversión de un objeto matemático para determinar una familia de ecuaciones.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan tres problemas, desarrolla cada uno como considere conveniente, no borres el desarrollo del trabajo que realices. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada.

1. Sea la ecuación de una recta L de la forma $2x + 4y – 8 = 0$

   a.1 Dibuje una grafica que represente la recta L.

   a.2 Indique las coordenadas donde la recta L intercepta los ejes x y y.

   a.3 Considera que la recta L en la ecuación $2x + 4y - 8 = 0$, contiene los puntos con coordenadas: Justifique su respuesta

   (0,0) ☐ (1, 3/2) ☐ (-2, 3) ☐

2. Indica gráficamente una familia de rectas que cumpla con la ecuación del inciso 1.

3. Encuentre una expresión algebraica para la familia de rectas del inciso 2.



ACTIVIDAD No. 7

Visualización



OBJETIVOS ESPECIFICOS: Explorar acerca del concepto, sentido de inclinación y paralelismo de dos ecuación lineales mediante procesos visuales.

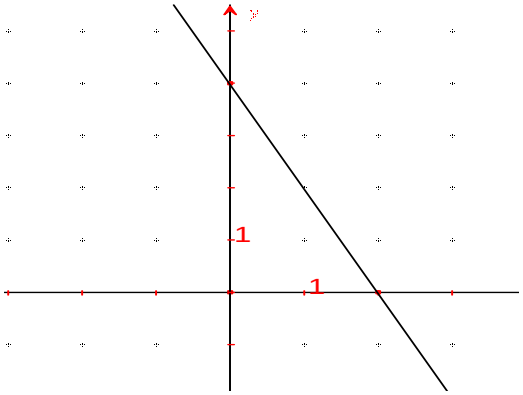
Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan dos problemas y una pregunta, desarrolla cada uno como considere conveniente, no borres nada aún cuando creas que sea incorrecto. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada

a. Sean las rectas L y M determinadas por las ecuaciones lineales $2x + 3y – 6 = 0$ y $4x + 6y = 0$ respectivamente, dibuje la gráfica de cada una de ella y luego conteste: ¿visualice la gráfica que corresponde a ambas rectas y haga sus conclusiones al respecto de las dos ecuaciones?

b. Dada la grafica donde se representa la rectas L, determine una ecuación que pase por el punto coordenado (1, -2) y que sea paralela a la recta L.



c. De ıos ıncisos anteriores a. y b. qué puedes concluir en relación de las rectas y de sus ecuaciones.

ACTIVIDAD No. 8

Concepto de visualización y pasaje de registro

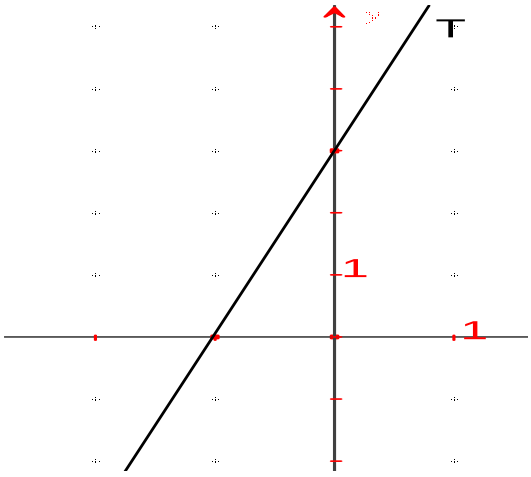
OBJETIVOS ESPECIFICOS: Explorar acerca de conceptos, sentido de inclinación y perpendicularidad de dos ecuaciones lineales mediante proceso visual.

Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan problemas, desarrolla cada uno como considere conveniente, no borres nada aún cuando creas que sea incorrecto. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada.

1. Sean las rectas R y T cuyas ecuaciones son $x + 3y - 6$ y $y = 3x - 5$ respectivamente. Dibuje una gráfica que represente cada recta y además ¿Qué conclusiones puedes hacer de ambas rectas?
2. Dada una gráfica donde se representa la recta T, determina una recta S que pase por el punto con coordenada (2, 1) y sea perpendicular a la recta T.



3. De los incisos anteriores 1 y 2 que puedes concluir de las rectas y de sus ecuaciones.

ACTIVIDAD No 9

Visualización de conceptos

OBJETIVOS ESPECIFICOS: explorar acerca de procesos de visualización que el alumno realiza con diferentes objetos.

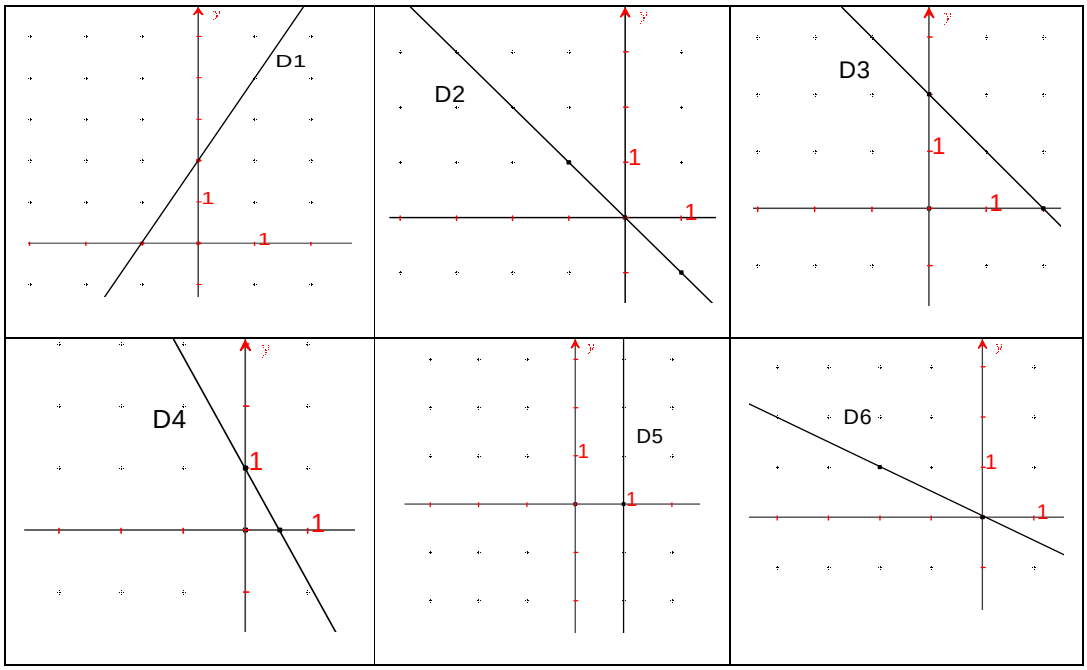
Nombre del alumno: _____

Fecha: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta una situación problemática, analiza cada una como considere conveniente, no borres nada aún cuando creas que sea incorrecto. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada.

Situación problemática

Sea x la abscisa y y la ordenada de un punto P en el sistema de coordenadas. Determine expresiones algebraicas (E1, E2,…, E9) que corresponden a cada una de las rectas D1, D2,…, D6.



E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
y = -x	y = 2x + 2	y $= -\frac{1}{2}x$	x=1	y= -x + 2	y = x	y = $\frac{1}{2}x + 1$	y = -2x	y = x +1

ACTIVIDAD No. 10

Construcción del concepto de ecuaciones lineales.

OBJETIVOS ESPECIFICOS: explorar acerca del concepto que tienen los alumnos de matemáticas I en torno a las ecuaciones lineales.

Nombre del alumno: _____

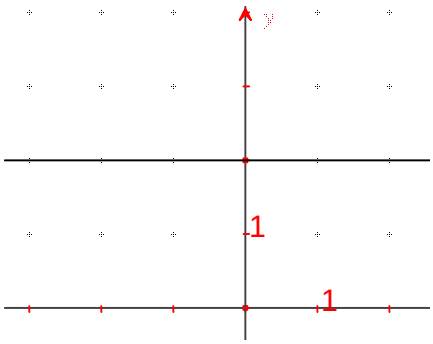
Fecha: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presenta una situación problemática, analiza cada una como considere conveniente, no borres nada aún cuando creas que sea incorrecto. De preferencia trabaja con lápiz carbón y en forma ordenada.

a. ¿Explica qué entiendes tú por ecuaciones lineales con dos variables después de pasar por la secuencia anterior?

b. Plantea tres ejemplos de ecuaciones lineales con dos variables que tú consideres pertinentes.

c. ¿Representa la figura de la gráfica una ecuación lineal con dos variables?



d. ¿Consideras que la secuencia didáctica anterior representó un aprendizaje del concepto de ecuación lineal con dos variables?

e. ¿A qué conclusiones puedes llegar acerca del sentido de inclinación de la recta de una ecuación lineal?

f. ¿De la experiencia anterior qué consideras fue la parte de la secuencia que representó mayor dificultad para ti en su desarrollo?