

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN**

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y
POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA



TESIS DE MAESTRÍA:
CONCEPTUALIZACIÓN DEL VALOR POSICIONAL EN LA ESCRITURA DE
NÚMEROS EN EL SISTEMA DECIMAL, EN LOS ALUMNOS DEL CUARTO
GRADO DE LA ESCUELA SOTERO BARAHONA

TESISTA:
Lic. YANIA ZAELIA ZUNIGA CANALES

ASESOR DE TESIS:
M.Sc. MARLON GEOVANY MEJÍA

TEGUCIGALPA, M.D.C. Marzo del 2012.

CONCEPTUALIZACIÓN DEL VALOR POSICIONAL EN LA ESCRITURA DE
NÚMEROS EN EL SISTEMA DECIMAL, EN LOS ALUMNOS DEL CUARTO
GRADO DE LA ESCUELA SOTERO BARAHONA

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN**

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y
POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO



CONCEPTUALIZACIÓN DEL VALOR POSICIONAL EN LA ESCRITURA DE
NÚMEROS EN EL SISTEMA DECIMAL, EN LOS ALUMNOS DEL CUARTO
GRADO DE LA ESCUELA SOTERO BARAHONA

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE MASTER EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESISTA:

Lic. YANIA ZAELIA ZUNIGA

ASESOR DE TESIS:

M.Sc. MARLON G. MEJÍA

TEGUCIGALPA, M.D.C. Marzo del 2012.

RECTOR

M.Sc. David Orlando Marín López

VICERRECTOR ACADÉMICO

M.Sc. Hermes Alduvin Díaz Luna

VICERRECTOR DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

MSc. Yenny Aminda Eguigure

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

M.Sc. Rafael Barahona Gómez

VICERRECTOR DEL CUED

M.Sc. Gustavo Adolfo Cerrato

SECRETARIA GENERAL

M.Sc. Celfa Adalís Bueso

DIRECTORA DE POSTGRADO

Dra. Jenny Margoth Zelaya

Tegucigalpa, M.D.C 2012

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la Terna Examinadora nombrada por la Dirección de Estudios de Postgrado de la UPNFM, como requisito para optar al grado académico de Máster en Matemática Educativa.

Tegucigalpa 17 de Noviembre del 2011

Msc. Libni Berenice Castellón

Examinadora-Presidente

Msc. Manuel Cardona

Examinador

Msc. Marlon G. Mejía

Asesor de Tesis

Yania Zaelia Zúniga Canales

Tesista

DEDICATORIA

A Dios todopoderoso

A mis padres Antonio y Doris Zúniga

A mis hermanos

A mi asesor M.Sc. Marlon G. Mejía

AGRADECIMIENTOS

A Dios, todopoderoso. Por darme las fuerzas, la sabiduría e inteligencia necesaria, para concluir mis estudios de maestría.

Al M.Sc. Marlon G. Mejía por su acertada dirección e incondicional apoyo, por toda la paciencia y su valioso tiempo dedicado a mi trabajo de investigación.

A mis padres, por los ejemplos de perseverancia, y constancia que los caracteriza siempre, por el valor mostrado para seguir adelante, por sus consejos, motivación y por su amor.

A mis hermanos, Jim, Fanny, Josías, Diana y Josiel Zúniga, por su motivación, apoyo moral y por su amor.

A todos los docentes, de la Maestría de Matemática Educativa que de una u otra forma han contribuido a mi formación profesional

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	Páginas
CAPITULO 1	
PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	17
1.1 Justificación del estudio.....	19
1.2 Preguntas de investigación.....	22
1.3 Objetivos de la investigación.....	22
CAPITULO 2	
MARCO CONCEPTUAL O MARCO TEÓRICO	
2.1 El sistema de numeración de valor posicional y las matemáticas.....	25
2.2 Concepto de número.....	26
2.2.1 Hacia una definición de número.....	26
2.2.2 El número en la historia.....	27
2.2.3 Contextos de significación.....	28
2.2.4 Cuantificar y representar (Comunicar cantidades y retenerlas en la memoria).....	28
2.2.5 Contar y calcular.....	30
2.2.6 Contexto ordinal y cardinal.....	32
2.3 El sistema decimal.....	32

2.4 El valor posicional y la suma de doble columna; algunos problemas.....	35
causados por la enseñanza tradicional	
2.5 El sentido numérico y su desarrollo.....	37
2.6 Antecedentes.....	39
2.6.1 Una propuesta integradora.....	44

CAPITULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO	56
3.1 Tipo de estudio.....	57
3.2 Población.....	57
3.3 Muestra.....	58
3.4 Plan para la recolección de información.....	59
3.4.1 Prueba diagnóstica.....	59
3.4.2 Actividades de aprendizaje.....	60
3.4.3 Técnica de Observación.....	62
3.5 Plan de análisis.....	63

CAPITULO 4

ANALISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	66
4.1 Prueba diagnóstica.....	67
4.2 Secuencia de las actividades problemáticas.....	95

CAPITULO 5

5.1 Conclusiones.....	154
5.2 Recomendaciones.....	157
5.3 Bibliografía.....	159

Anexos

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del concepto de valor posicional ha sido un tema de gran relevancia en la literatura especializada de los últimos quince años. Sin duda ello se debe a que se le ha considerado un asunto fundamental en el desarrollo del conocimiento aritmético de niños. (Cobb, 1988).

Los enfoques y perspectivas de los trabajos que afrontan el tema han sido diversos, lo que ha puesto de relevancia que el valor posicional es un conocimiento complejo que es influido por una gran variedad de factores.

En contraste con estas coincidencias, los trabajos han diferido en establecer cuáles son las habilidades que participan con más peso en la construcción del concepto de valor posicional, así como en asentar qué actividades son las que mejor muestran su adquisición.

Algunos autores, (Jones, Thornton, y Putt, 1994; Jones, et al. 1996; Jones y Thornton, 1993) consideraran que hay cuatro habilidades que están directamente relacionadas con la operación del sistema de numeración de valor posicional, las cuales son: contar, partir, agrupar y relacionar números. Según ellos, esas habilidades evolucionaban paralelamente en la comprensión del sistema.

En este trabajo se reporta una investigación realizada con dieciséis niños de cuarto grado, de la escuela Sotero Barahona. El objetivo de esta investigación fue explorar acerca de la comprensión de los procesos matemáticos, así como desarrollar el concepto del valor

posicional en la escritura de números en el sistema decimal en los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona

La metodología consistió en la realización de una prueba diagnóstica, la cual proporcionó una idea general de los errores más comunes y dificultades que tenían los niños al operar con el concepto del valor posicional, además se desarrolló una serie de actividades de aprendizaje, las cuales guiaron a los niños a la comprensión del concepto del valor posicional.

Entre los resultados que se obtuvieron se detectó que la mayoría de los niños de cuarto grado no habían adquirido correctamente el concepto del valor posicional, además se encontraron ciertas formas erradas de los niños al resolver algunas actividades, que parecen ser causadas por el tipo de enseñanza que han sido sujeto a lo largo de su vida escolar. Después de la intervención de la evaluación, se observa que los niños superaron los conocimientos errados y los errores más comunes al operar con numerales de varios dígitos, así como la adquisición del concepto de valor posicional.

Se pone en juego las concepciones iniciales de los alumnos, acerca de la escritura de números, y dan cuenta de un bagaje de conocimientos disponibles; además algunas dificultades que pueden constituirse en puntos de partida para nuevos aprendizajes.

Este trabajo de investigación, tiene como finalidad contribuir al desarrollo del concepto de valor posicional que adquieren los niños de cuarto grado y además se espera que superen las dificultades y errores más comunes que se dan al operar con el valor posicional en la escritura de números.

El reporte de ésta investigación se ha dividido en cinco capítulos.

Capítulo 1: Se presenta el problema específico que se propuso investigar, así como los objetivos que orientaron este trabajo.

Capítulo 2: Se hace una descripción general de lo qué es el valor posicional y la relación que guarda con la enseñanza. También se hace una revisión de los estudios más importantes que, sobre el tema del aprendizaje del valor posicional, se han hecho.

Capítulo 3: Se describe la metodología empleada, la población y muestra con la que se trabajó. Así como el plan para la recolección de información.

Capítulo 4: Se presenta el análisis de los resultados, el cual se desarrolló en dos etapas: En la primera etapa se muestran los datos recolectados mediante una prueba diagnóstica , proporcionando evidencia de la noción que tienen los niños acerca del concepto de valor posicional en la escritura de números, así como las estrategias empleadas, y en función de esta se desarrolló la segunda etapa de las actividades en las cuales los niños desarrollaron estrategias propias, adquirieron nuevas habilidades para resolver un problema y desarrollaron el concepto del valor posicional

Capítulo 5: Se presenta las conclusiones y recomendaciones, en los cuales se da una interpretación de los resultados obtenidos por la investigación.

El trabajo de investigación finaliza con una serie de referencias bibliográficas utilizadas en el desarrollo de la investigación, acompañado con el anexo de la secuencia de enseñanza, el cual

puede ser retomada para realizar mejoras, aportando así otras ideas que faciliten la comprensión de la conceptualización del valor posicional.

CAPÍTULO 1

1.1 Definición del problema

La educación escolar es un proceso en el que se entrelazan dos fenómenos con racionalidades propias: la enseñanza y el aprendizaje. A pesar de que un estudio completo del proceso educativo implicaría necesariamente contemplar ambos enfoques y explicar la forma en la que interactúa uno con el otro, hasta el día de hoy lograr esto parece una tarea sumamente complicada.

Diferentes perspectivas teóricas, con diferentes orígenes disciplinarios, han logrado aportar mayor claridad a cuestiones relacionadas con uno de los enfoques, pero han fracasado al tratar de explicar la otra parte con la claridad que otras perspectivas (con las que mantienen diferencias teóricas hasta el momento inconciliables) lo hacen. Con esto parece que tratar de acercarse a un proceso educativo implica tener que optar ya sea por el enfoque de la enseñanza o el del aprendizaje (José Morfín, 1997)

Ello no significa que la elección de uno de los enfoques implique desechar o desconocer la importancia de la otra perspectiva y del fenómeno que estudia. Por el contrario, estudiar el aprendizaje implica aportar conocimiento sobre los resultados de la enseñanza en cuyo marco se dio. En reciprocidad, estudiar la enseñanza significa indagar en las formas de interacción social en las que se logra el aprendizaje.

Cuando la mayoría de los niños están adquiriendo apenas el concepto de número, los contenidos de los programas requieren que aborden ejercicios de adición y sustracción que suponen una comprensión de los conceptos de valor posicional. Generalmente esta expectativa

incluye el trato con problemas en un nivel simbólico, abstracto, con sólo una breve exposición al nivel gráfico y sin ningún ejercicio con objetos conexos. A los niños se les da poca oportunidad de elaborar sus relaciones de valor posicional antes de aplicarlas. Aquellos que comienzan a desarrollar sus propios métodos, encuentran que los del maestro no se pueden deponer por los suyos y, en consecuencia, ceden ante la autoridad, memorizan y obedecen un conjunto de reglas ciegamente (Maninat, 1998).

El valor posicional es un concepto importante en el desarrollo del pensamiento aritmético, que para poder ser comprendido y manejado cabalmente requiere de un largo y complejo proceso. La comprensión y manejo del concepto implica una diversidad de habilidades que participan en su construcción, las cuales, según la literatura existente, pueden incluir: la elaboración de hipótesis sobre las posibles reglas de armado del sistema de numeración escrito (Lerner y Sadovsky, 1994); la habilidad para concebir y operar con agrupamientos (Bednarz y Janvier, 1988); el reconocimiento, en colecciones de objetos, de los valores representados por los dígitos de un numeral (Ross, 1990); el uso de unidades compuestas para contar (Steffe, Cobb, y Glasersfeld, 1988); además de otros conocimientos numéricos como el hacer agrupamientos a partir de otros y el reconocer “distancias” entre cantidades (Jones, Thornton, y Putt, 1996).

Esta información resulta relevante para la planeación curricular y para conocer los resultados que está logrando un sistema de enseñanza, a pesar de que estos estudios no se hayan preocupado por la explicación exhaustiva de cómo fue esa enseñanza y por qué se ejerció de una cierta forma.

Considerando estas ideas ha surgido interés en realizar un estudio que indague sobre **el desarrollo del concepto de valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal** que logran los estudiantes de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona.

1.2 Justificación del estudio

La adquisición del concepto de valor posicional es fundamental en el desarrollo del pensamiento aritmético que la educación primaria pretende lograr, ya que podrá permitir intervenir con mayor eficiencia en la enseñanza de las matemáticas en nuestras escuelas.

Uno de los constituyentes básicos de las matemáticas de nuestra cultura occidental, es el sistema de numeración decimal, el cual, siguiendo algunas reglas aparentemente sencillas, permite la representación de cualquier magnitud o cantidad y también la realización de una gran variedad de cálculos. Sin embargo, esa sencillez no es absoluta; se edifica sobre algunos, relativamente complejos, conceptos matemáticos que, probablemente por la costumbre de operar con ellos, no siempre son evidentes.

Es sobre la racionalidad del sistema de numeración decimal que se construyen la mayoría de los cálculos convencionales con los que se opera (algoritmos) y también buena parte de los sistemas de medición (kilos, metros, grados centígrados, etc.). Todo esto hace que el conocimiento del sistema de numeración decimal sea un contenido muy importante de la educación elemental; hecho que no ha pasado desapercibido para los creadores del currículo Nacional Básico, ni para los investigadores. Sobre lo primero se puede decir, que desde la reforma del Currículo Nacional Básico de México en 1971, lo han convertido en un tema muy

importante, al menos en los primeros grados de primaria, aunque los resultados no hayan sido del todo buenos. Respecto a la investigación ha sido una área a la que se le ha dado mucha atención, al grado que una importante parte de los trabajos orientados a conocer las diferencias en el aprendizaje de las matemáticas en culturas distintas, han utilizado como tema central la adquisición del concepto de valor posicional (Fuson y Kwon, 1992; Miura y Okamoto, 1989; Miura, Okamoto, Chungsoon, Steere, y Fayol, 1993; Yang y Cobb, 1995).

La indicación de Lankford (1973) de que los errores son más sistemáticos que aleatorios fue confirmada posteriormente: Ginsburg (1977a, 1977b) y Brown y Burton (1978) han descubierto ejemplos de algoritmos que producen errores coherentes entre los niños de la escuela primaria. Brown se ha embarcado en un programa de investigaciones que se dirige de forma específica a establecer el conocimiento que tienen los niños de los procedimientos de cálculo. A los algoritmos erróneos o incorrectamente comprendidos los describe como ‘gazapos’, tomemos la siguiente serie de problemas, resueltos todos ellos por un niño del que ya se había reconocido que tenía problemas con las matemáticas.

$$7+8=15 \quad 9+5=14 \quad 17+8=25 \quad 87+93=11 \quad 679+794=111$$

Dado que muchos de los pares de números están bien sumados, se podía concluir a primera vista que las respuestas erróneas se deben a errores casuales. Pero si se estudian las respuestas con mayor detenimiento, se descubre un error de procedimiento sistemático que explica dichos errores, y permite predecir como resolvería el niño otros problemas. Adviértase la cantidad de ‘unos’ que aparecen en sus respuestas. El fallo de su procedimiento al realizar sumas de doble columnas, estaba en que cuando hay que llevar la unidad, el niño anota el valor de las decenas (que es la cifra que habría que llevarse), y el valor de las unidades lo desprecia. Cabe suponer

que los tres primeros ejemplos están resueltos de forma correcta porque se han calculado mediante otros algoritmos, como el conteo.

Al respecto Lankford (1992), pone de manifiesto que el procesamiento de la información puede ser sistemático, aunque genere respuestas incorrectas o esté basado en información incorrecta.

De acuerdo al National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, 2000), en los niveles 1, 2 y 3 todos los niños deben cumplir con las siguientes expectativas: Contar con entendimiento y reconocer "cuántos" hay en un grupo de objetos; el uso de múltiples modelos para desarrollar una comprensión inicial de valor posicional y el sistema de base diez el número; desarrollar la comprensión de la posición relativa y la magnitud de los números enteros y de los números ordinales y cardinales y sus conexiones; desarrollar un sentido de los números enteros y representan y utilizarlos de manera flexible, incluidas las relativas, la composición y descomposición de números

Según el Diseño Curricular Nacional Básico (DCNB) en el primer ciclo, aborda unidades de valor posicional, donde se enfatiza el conocimiento del valor posicional de números naturales de un rango adecuado a sus capacidades de comprensión. Además se tiene como meta principal el desarrollo de habilidades y destrezas de resolver problemas aplicados a la vida real

Al respecto Barker (1979, referido en Orton, 1998) muestran que el promedio de niños de 7 a 9 años no puede dominar números con 4 dígitos o más y que necesitan mucho tiempo para comprender realmente el concepto del valor posicional.

1.3 Preguntas de Investigación

- 1) ¿Cuáles son las dificultades que tienen los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona con respecto al valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal?
- 2) ¿Cómo entienden el concepto de valor posicional los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona en la escritura de números en el sistema decimal?
- 3) ¿Qué estrategias utilizan los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona para resolver problemas que involucren el concepto de valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal?
- 4) ¿En qué nivel del proceso de desarrollo del concepto del valor posicional, se encuentran los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona?
- 5) ¿Cómo adquieren y construyen el sentido numérico lo niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona?

1.4 Objetivos de la investigación

En el estudio realizado se consideraron los siguientes objetivos

Objetivo General

El propósito de esta investigación es explorar acerca de la comprensión de los procesos matemáticos, así como desarrollar el concepto del valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal en los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona

Objetivos Específicos

- 1) Detectar las dificultades que tienen los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona con respecto al concepto de valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal.
- 2) Lograr una descripción general de las distintas formas que entienden el concepto de valor posicional los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona en la escritura de números en el sistema decimal.
- 3) Describir las estrategias utilizadas por los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona, para resolver problemas que involucren el concepto de valor posicional en la escritura de números del sistema decimal
- 4) Determinar el nivel del proceso de desarrollo del concepto del valor posicional en el que se encuentran los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona
- 5) Describir como los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona adquieren y construyen el sentido numérico

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL O MARCO TEÓRICO

2.1 El sistema de numeración de valor posicional y las matemáticas

La cultura, a lo largo de su historia, ha logrado construir un poderoso sistema matemático que le permite interactuar con el mundo: interpretándolo, organizándolo e interviniendo en él. Parte de la construcción de este sistema históricamente se ha realizado en el ámbito de una dinámica social, con la cual ha mantenido una relación dialéctica en la que, por una parte, la construcción del sistema ha sido determinada por las cada vez más complejas formas de interacción social, sobre todo las que tienen que ver con aspectos económicos. Por otro lado, como consecuencia de estas formas complejas de interacción, el sistema matemático se ha ido constituyendo en un código que pauta parte de la actividad social, sobre todo la que tienen que ver con aspectos como: la producción de insumos, el comercio de bienes y servicios, las relaciones de trabajo, los sistemas de crédito, la recaudación de impuestos, etcétera.

Uno de los constituyentes básicos de las matemáticas de la cultura occidental, es el sistema de numeración decimal, el cual, siguiendo algunas reglas aparentemente sencillas, permite la representación de cualquier magnitud o cantidad y también la realización de una gran variedad de cálculos. Sin embargo, esa sencillez no es absoluta; se edifica sobre algunos relativamente complejos conceptos matemáticos que, probablemente por la costumbre de operar con ellos, no siempre son evidentes. Ross (1989a) reconoce cuatro propiedades básicas que constituyen al sistema de numeración:

1. Propiedad posicional; la cantidad representada por un dígito en particular está determinada no sólo por su “figura”, sino también por su posición en el numeral.

2. Propiedad de “base diez”; los valores de la posición se incrementan de derecha a izquierda en potencias de diez.
3. Propiedad multiplicativa; el valor de un dígito se da multiplicando su valor aparente por el valor asignado a su posición.
4. Propiedad aditiva; la cantidad representada por todo el numeral es la suma de los valores representados por cada uno de los dígitos que lo componen.

Así pues, para conocer la magnitud que representa un numeral como el 1997, se sabe que el valor de cada “figura” estará determinado no sólo por su valor aparente, sino también por el lugar que ocupa; que ese valor se determina en potencias de diez de izquierda a derecha (10 a la 0 para el primer lugar, 10 a la 1 para el segundo lugar, 10 a la 2 para el tercer lugar, etc.), que habrá que multiplicar el valor aparente de cada dígito por su valor de posición y que habrá que sumar el resultado de todos los valores relativos. O sea, para el numeral que ocupa:

$$(7 \times 10)^0 + (9 \times 10)^1 + (9 \times 10)^2 + (1 \times 10)^3$$

Y el resultado será “1997”. Por supuesto que no se hace este tipo de cálculos cada vez que se trabaja con una cifra; se está acostumbrado a concebir las magnitudes bajo este sistema de numeración y por eso no es necesario. Sin embargo, al operar con el sistema se está operando bajo esta racionalidad, y es probable que para poder operarlo cabalmente se tenga que dominarla.

2.2 Concepto de número

2.2.1 Hacia una definición de número

Es preciso aclarar que no existe una definición única ni acabada. Si se busca por ejemplo en un diccionario observara que se hallan diferentes acepciones que a su vez se refieren a distintos atributos y aspectos. Igualmente se intentara construir el concepto. Se partirá de la historia, de la construcción humana del número, luego se definirá diferentes contextos en que el número adquiere significado.

2.2.2 El número en la historia

Siguiendo a Engels (1976), puede considerarse al desarrollo del conocimiento como un proceso de apropiación de la naturaleza. La realidad natural se transforma en una realidad humanizada en función de las distintas necesidades del Hombre y en esa transformación se genera conocimiento. Es preciso que exista un primer “reconocimiento” del objeto natural para luego insertarlo en la lógica de la actividad humana. Su consecuencia es una divergencia cada vez mayor entre el procesamiento del conocimiento cotidiano y las sucesivas elaboraciones conceptuales que se traduce en abstracciones cada vez más complejas. Estos procesos no suelen producirse en secuencia lineal porque están fuertemente condicionados por inevitables dinámicas históricas y sociales propias de cada pueblo, de cada sociedad.

Se describirá este proceso a través de etapas:

- 1) Distinción de uno y muchos.
- 2) Necesidad de recuento de pertenencias, que implica establecer una correspondencia uno a uno, entre éstas y un conjunto de igual cantidad de elementos, cuyo representante es el número cardinal correspondiente.
- 3) La necesidad de registro, creándose así rótulos y etiquetas que posibilitan organizar las muestras de acuerdo al número de elementos, apareciendo así el aspecto ordinal

- 4) Surgimiento de los sistemas de numeración como herramienta para organizar aquellos rótulos que permitieran otros usos del número
- 5) Acción del conteo, uso de la secuencia ordenada de palabras número en correspondencia uno a uno de los elementos, donde el último de los elementos nombra la clase a la cual pertenece (Villella, J., 1996).

2.2.3 Contextos de significación

Se basara en la distinción de diversas funciones del número como un elemento para conceptualizarlo.

Existen varias clasificaciones que no difieren en lo esencial, Brissiaud (1993), distingue dos funciones principales: representar (para comunicar cantidades o retenerlas en la memoria); y calcular (establecer una cierta relación entre cantidades).

2.2.4 Cuantificar y representar (comunicar cantidades y retenerlas en la memoria)

Se diferencian dos formas de representar cantidades, las colecciones de muestra y las representaciones numéricas. Si bien ambas utilizan el criterio de correspondencia uno a uno, esta relación se establece de diferente manera.

La primera se refiere a la construcción de una colección de muestra para establecer dicha correspondencia que represente la cantidad de elementos. Por ejemplo para representar los platos puestos en una mesa se utilizan tantas piedritas como platos.

La segunda representa la cantidad con el último elemento puesto en correspondencia uno a uno. (Nótese que la diferencia radica en que con las colecciones, la cantidad se representa con todos los elementos, mientras en la segunda sólo con el último).

El segundo tipo de correspondencia puede realizarse a través de “palabras–número” (enunciación oral de la cantidad) o cifras (signo gráfico), requiriéndose para ello un sistema arbitrario de signos convencional y socialmente establecido (histórico). Brissiaud (1993).

Aquí aparece una primera dificultad en el proceso de conceptualización del número, distinguir palabras–número y cifras, del número en sí en tanto representación arbitraria y social de una cantidad. Por ejemplo, el número 18 está formado por dos cifras (‘1’ y ‘8’) y se enuncia con dos palabras–número pero se trata de un solo número.

Si bien ordinariamente se utilizan indistintamente los términos contar y cuantificar, debemos hacer una distinción. Cuantificar es asignarle una medida (cantidad) a una magnitud (extensión), o sea, atribuirle valor a la extensión de una colección, determinar la cantidad de elementos que tiene.

Se puede cuantificar de manera directa o indirecta. Es decir, existen dos formas de cuantificar. Directamente mediante percepción global (captación directa y exacta de la cantidad, se realiza por lo general frente a cantidades pequeñas), conteo (es un procedimiento largo y exacto) o evaluación global (se aplica a grandes cantidades y es aproximativo).

Con relación al conteo, Gelman y Gallistel (1978) y Gelman y Meck (1983) proponen la existencia de cinco principios que, según estos autores, guían la adquisición y ejecución de esta acción matemática.

- 1) **Principio de correspondencia biunívoca:** El niño debe comprender que para contar los objetos de un conjunto, todos los elementos del mismo deben ser contados y ser contados una sola vez.
- 2) **Principio de orden estable:** Las palabras-número deben ser utilizadas en un orden concreto y estable.
- 3) **Principio de cardinalidad:** La última palabra-número que se emplea en el conteo de un conjunto de objetos sirve también para representar el número de elementos que hay en el conjunto completo.
- 4) **Los principios de conteo:** Pueden ser aplicados, independientemente de sus características externas, a cualquier conjunto de objetos o situaciones, es lo que se conoce como el principio de abstracción.
- 5) **Principio de intrascendencia del orden:** El resultado del conteo no varía aunque se altere el orden empleado, para enumerar los objetos de un conjunto.

Estos tres principios son los que tienen una vinculación más directa con la acción de conteo.

2.2.5 Contar y calcular

Brissiaud (1993), contar y calcular son maneras distintas de establecer relaciones entre cantidades, donde una de ellas se opone a la otra, en el sentido de que al contar se establece una relación entre elementos de una colección y palabras-número; mientras que al calcular se establece una relación directa entre cantidades, sin pasar por la construcción de colecciones cuyos elementos se cuentan.

Se debe recordar que no se cuenta con un solo propósito, sino que se hace con varios sentidos.

Algunos de ellos son: comparar, ordenar, igualar, sumar y comunicar.

El proceso de contar es complejo ya que requiere:

- 1) Conocer la serie numérica o parte de ella.
- 2) Establecer la relación biunívoca uno a uno entre los elementos a contar y las palabras– número que se recitan.
- 3) Identificar el último término enunciado como representante de la cantidad.

Brissiaud (1993), distingue la acción de contar–numerar de la siguiente manera. Al contar– numerar simplemente se asigna a cada elemento del conjunto una palabra–número que lo identifica. En tanto al enumerar, luego de contar–numerar cada uno de los elementos, la última palabra–número representa la cantidad de elementos de la colección, expresando así su cardinalidad.

Por otra parte, establecer relaciones entre cantidades a través del cálculo requiere mayores niveles de abstracción: separarse del apoyo concreto utilizando formas numéricas con cierto grado de simbolización (cifras, configuraciones estándar como los puntos de los dados, etc.).

Se entiende que existen diversas formas de calcular que permiten arribar a resultados. Si bien no todas ellas son exactas, tienen valor en tanto resuelven distintas situaciones. Por ejemplo el cálculo pensado, que no utiliza algoritmos, el cálculo sistemático o algorítmico, probabilístico, etc.

El cálculo no es el tema central de este trabajo, igualmente hago algunas referencias a él en tanto interviene en el proceso de conceptualización del número.

2.2.6 Contexto ordinal y cardinal

Otra distinción de contextos que le dan sentido al número, según la función que éste cumpla es la de contexto ordinal y contexto cardinal.

Cuando se pretende ordenar o seriar concentrándose en la posición de un elemento respecto de otro nos referimos al contexto ordinal, y cuando la intención es representar una colección de objetos por el valor de su extensión al contexto cardinal.

Al respecto es interesante el planteo de Brissiaud (1993), que destaca dificultades y confusiones que puede ocasionar el uso de estos términos para designar procedimientos. Por ejemplo, cuando se cuentan las monedas que se tienen en el bolsillo el objetivo es definir la cantidad (cardinal) y cuando se cuenta el número de oficinas en un corredor su objetivo puede ser determinar en qué orden está la deseada (ordinal). Por esta razón es que se determina el contexto según se dé protagonismo al número como cuantificador o como indicador de posición.

2.3 El sistema decimal

Lerner y Sadovsky (1997), este es el sistema más popular, utilizado convencionalmente y objeto de estudio predominante de la educación básica. Se trata de un sistema posicional y polinómico.

Una primera consideración es que existe una gran diferencia que se constituye como problema

a la hora de apropiarse del sistema, que refiere a la numeración oral y la escrita. La primera de ellas tiene una estructura aditiva (pensemos en los dieci, los veinti, etc.), en tanto la segunda es polinómica (y posicional), es decir el valor que representa cada cifra se obtiene multiplicando esa cifra por cierta potencia de 10.

De la propiedad polinómica se desprenden algunas regularidades. Lerner y Sadovsky (1997), detectaron su importancia en el proceso de aprendizaje, demostrando que aparecen tempranamente y proponen algunas pautas de trabajo: “Cobran especial importancia además de los criterios para ordenar números «leyes» como «los ‘dieces’ van con dos, los ‘cienes’ van con tres»; «después de nueve viene cero y el otro número pasa al siguiente»; «hay diez números (de dos cifras) que empiezan con uno, diez que empiezan con dos...»” (pág. 159).

A su vez, el manejo de esta última regularidad por parte de los niños nos muestra la importancia de trabajar con los llamados nudos (potencias de 10 multiplicadas por determinado coeficiente, 10, 20, 100, 1000...).

Conocer el sistema de numeración decimal implica entonces el manejo de un conjunto de unidades de diversos tamaños, particularmente el 10 y el 5, éstas son las cantidades de dedos en una mano, configuraciones primarias y los nudos exactos.

En los sistemas posicionales el cero cumple una función esencial ya que cuando forma parte de un número de dos o más cifras plantea, al mismo tiempo la ausencia de elementos y la presencia de una posición. Por ello constituye a su vez un problema y un elemento a trabajar (Lerner, D, 1992).

Otro importante elemento a tener en cuenta para el planteo didáctico es el que describen

Brissiaud, Lerner y Sadovsky et.al (1994), como resultado de observaciones sistemáticas que les permitieron abstraer ciertas estrategias comunes que aplican y desarrollan los niños cuando no se les circunscribe al cálculo algorítmico. Se trata de las estrategias de descomposiciones y recomposiciones derivadas de las propiedades del sistema mismo. Para facilitar el “cálculo pensado”, se ponen en acción estas estrategias, estrechamente vinculadas a la conceptualización del sistema de numeración en una relación de retroalimentación que tiene por eje al concepto de número. A continuación se detallan algunas de ellas.

Estrategia de igualación. Permite asociar una cantidad a una adición de dos cantidades conociendo una de ellas. “Igualar con hueco”, por ejemplo: El juego de “ $7=3+$ u $8=+4$ ”. O “ $=2+7$ ”. De esta manera generan esquemas que luego aplican en distintas situaciones, a su vez esto le permite al docente trabajar distintos sentidos de una misma operación. El niño desde muy temprano maneja con cierta facilidad las “parejas de números” ($4+4$, $3+3$, $x+x$), así como las relaciones numéricas del 5 y el 10 con otro número ($5+x$, $10+x$), esquemas que agilizan el cálculo mental, evitándoles el recuento (o sobre conteo).

El manejo de algunas cantidades como unidades (como se mencionó con anterioridad), les permite desarrollar estrategias para descomponer al momento de operar, tales como la “vuelta al 5” y “vuelta al 10”. De esta manera utilizan “formas conocidas”. Un ejemplo: Al resolver $8+2$ (mediante la “vuelta al 5”) descomponen el 8 en $5+3$, para luego sumar 2. Esto mismo se ve con el 10. También se aplica con otros nudos mayores, lo que se describe como suma natural, por ejemplo: $23+42 = 20+40+3+2$.

De manera análoga, en el “paso a la decena”, se compone la decena a partir de la descomposición previa tomando como base el número mayor y “formas conocidas”. Ejemplo: $8+4 = 8+2+2$, donde se descompuso el 4 en $2+2$, de manera de aplicar la forma conocida $8+2=10$.

Otra estrategia que encontraron es el uso de operaciones prefijadas, a las que otros autores denominan “tablas de sumar”, Brissiaud (1993) u “operaciones simples”, Kamii (1992). Esta estrategia se constituye en una herramienta poderosa como complemento de otras estrategias como descomponer y recomponer (si la conocida es $8+2$, entonces el niño puede calcular $8+4$, como $8+2+2$).

Se reitera que todas estas estrategias son poderosas en tanto no sean impuestas o enseñadas en el sentido estricto. Sino detectadas, explicitadas, razonadas, colectivizadas y puestas en aplicación.

En lo que sigue se describirán otros obstáculos que se presentan en los procesos de aprendizaje y de enseñanza, y la problematización como recurso.

2.4 El valor posicional y la suma de doble columna; algunos problemas causados por la enseñanza tradicional

Hablar de la práctica docente es hablar de la diversidad. Ello dificulta el que se pueda tipificar una “forma tradicional de enseñanza”. Sin embargo, existen ciertas pautas generales que pueden ser reconocidas en la práctica de la mayoría de los docentes y que son producto de una forma históricamente creada de enseñanza de las matemáticas (Cobb, 1991).

La secuencia básica consiste en comenzar enseñando los números del uno al nueve, presentándolos como “figuras” que corresponden a la numerosidad de conjuntos o colecciones. Posteriormente se muestra al diez en la misma forma para después presentarlo como “una decena”, o sea, como una agrupación de diez elementos. Se continúa explicando los números de dos dígitos como compuestos de “decenas” y “unidades”, ya sea presentando todas las decenas hasta el cien y después las combinaciones con unidades (eg. 10, 20, 30... 90, 100; y luego: 21, 24, 27... 31, 34, 37...) o “la decena” y su combinación con unidades, de una en una (eg. 20, 21, 23... 30, 31, 33...). Según Kamii (1992), el valor posicional se basa en la idea que es posible adquirir el concepto haciendo abstracciones de las *cualidades numéricas de conjuntos o colecciones*. Esto es, que “el ser una decena” es un “hecho **numérico**” propio de un conjunto de diez objetos; algo que “objetivamente existe” en el conjunto, y que puede ser aprehendido a través de realizar abstracciones de lo que se observa.

En los libros de texto se continúa el trabajo introduciendo la suma de doble columna, primero con cálculos que no implican reagrupación de decenas y unidades, y posteriormente con otros que sí. Fuson (1990) hace notar que al proceder de esta forma, en los libros de texto tradicionales se asume que la comprensión de los conceptos de “decena” y “unidad” son prerequisites para la operación de la suma de doble columna, y no que son conocimientos que se complementan y enriquecen mutuamente.

Por otro lado, es necesario indicar que gran parte de las dificultades que tienen los niños y los maestros en formación, con los números decimales tienen su origen en el modo en que estos se enseñan en la escuela. Lampert (1989, p. 229), refiriéndose a las dificultades relacionadas con

el valor posicional, señala a la “invisibilidad de la cantidad en el sistema de valor posicional” como uno de los problemas que impiden alcanzar una correcta comprensión del modo en que se trabaja con el valor posicional en los algoritmos de multiplicación y división:

Precisamente porque los ceros suelen “asumirse”... los números que aparecen según se realizan las distintas partes del algoritmo no se parecen a los números que corresponden a las cantidades que realmente representan.

Para obtener la respuesta final, uno debe seguir cuidadosamente el procedimiento para recuperar el orden de magnitud correcto. (p. 229).

Con respecto a la frase “invisibilidad de la cantidad en el sistema de valor posicional”, se refiere particularmente al valor posicional que ocupa el cero en una determinada cantidad. Por ejemplo, si tenemos 2012, los niños lo asocian con doscientos doce, ya que para ellos el cero no ocupa el lugar de las centenas, y en esa posición no tiene ningún valor, simplemente no lo toman en cuenta. Generalmente esto sucede cuando el cero se encuentra entre otros dígitos.

2.5 Sentido numérico y su desarrollo

Desde los niveles de educación infantil, uno de los objetivos básicos de la educación matemática será el desarrollo progresivo del "sentido numérico", entendido como "una buena intuición sobre los números y sus relaciones", que debe desarrollarse gradualmente como resultado de explorar los números, usarlos en una variedad de contextos, y relacionarlos entre sí, superando el limitado aprendizaje de los algoritmos tradicionales. "El sentido numérico se concibe como una forma de pensar, por consiguiente no es una "lección" en el currículum de las matemáticas de Primaria, sino una manera de aproximarse al trabajo con los números en el aula". Godino (2004)

Godino, J.D (2004) La comprensión y dominio de los números naturales pone en juego muchas ideas, relaciones y destrezas, por lo que podemos considerarlo como un aprendizaje complejo, que no se desarrolla de manera simple y automática. Con la expresión ‘sentido numérico’ hacemos referencia al complejo de nociones y relaciones que configuran el ‘sistema de los números naturales’. Incluye, por tanto, su origen en las actividades humanas de contar y ordenar colecciones de objetos, los instrumentos materiales inventados para dicha actividad, las operaciones y relaciones que se establecen entre ellas para la solución de problemas prácticos, y el propio sistema lógico–deductivo que organiza, justifica y estructura todos sus elementos.

El dominio intuitivo, flexible y racional de los números que caracteriza la apropiación del sentido numérico por parte del sujeto se inicia en el periodo de educación infantil, con las actividades de clasificación y ordenación de colecciones (uso de relaciones “más que”, “menos que”, “igual”,...), el aprendizaje de la secuencia numérica hasta la decena, y continúa desarrollándose en los niveles escolares posteriores trabajando con números más grandes, fracciones, decimales, porcentajes, etc.

El desarrollo de un sentido numérico en su vertiente curricular y didáctica pasa por un conocimiento intuitivo de lo cuantitativo en relación con situaciones concretas. Permite, por lo tanto a los estudiantes, procesar situaciones mediante juicios ligados a lo cuantificable. En diversas investigaciones se ponen muchos ejemplos que reflejan este “sentido numérico”. ¿Hasta qué punto se desarrolla? ¿Cuáles son sus características? Hay estudiantes que no son capaces de explicar el por qué 132 es menor que 1428. Poseen solo una intuición de que el número más largo es mayor.

Godino(2004) Potenciar la estructura numérica complementaria al sentido numérico, implica ir más allá de las funciones y usos que hacemos de los números: descubriendo relaciones, cadencias, patrones, etc. Eso conlleva también: consolidar destrezas de cálculo mental y aproximado, conocer propiedades, leyes de composición, etc., junto habilidades propias del razonamiento proporcional, cuadrático, visual, etc. Adquirir o construir un sentido numérico implica:

- a) Reconocer textos numéricos y significados, de forma que se vea los números como algo relativo, sabiendo las posibles distinciones de contextos o realidades, así como diversas representaciones, y su aprovechamiento en el trabajo de operaciones.
- b) Reconocer relaciones numéricas de tipos diferentes por métodos visuales, de cálculo u otros, sabiendo aplicarlas cuando sea conveniente.
- c) Establecer estrategias y razonamientos con números argumentando lo que fuera preciso.

2.6 ANTECEDENTES

Ross (1990), en su trabajo, juzgó que el proceso de adquisición del valor posicional en los niños, podía ser estudiado desde diferentes perspectivas. Sin embargo, un conocimiento que ella consideró fundamental en la adquisición del concepto, y en el cual centró su investigación, fue el de saber que: “En un numeral de dos dígitos, el numeral completo representa una cantidad completa de objetos, mientras que los dígitos individuales representan una partición de la colección total en una parte de decenas y otra de unidades” (Ross, 1990, p. 1).

Siguiendo la idea del párrafo anterior, adquirir este conocimiento requeriría, no solamente de que el niño se le transmitiera la “información cultural” respectiva a la representación de los numerales de dos dígitos, sino que también hubiera desarrollado los “conceptos numéricos” necesarios.

Ross (1990), propuso que uno de esos “conceptos numéricos” era el de “relación parte todo”, el cual vinculó con la “inclusión de clases”; esta última estriba en poder concebir que el todo de una colección sea mayor que cualquiera de sus partes.

Para conocer el significado que los niños le atribuían a los dos dígitos de un numeral, Ross (1990), diseñó un instrumento en el que los niños trabajaban individualmente con colecciones de objetos. El material más utilizado en el instrumento eran los “Cubos multibase de Dienes”, que son cubos de madera de aproximadamente un centímetro cúbico, que presentan las equivalencias del sistema decimal: cubos sueltos para la unidades y tiras de diez cubos unidos para las decenas.

En una parte del instrumento los niños tenían que presentar colecciones formadas con los cubos que equivalieran a las cantidades representadas por distintos numerales. Esto lo podían hacer usando solamente cubos sueltos, o cubos sueltos y tiras de diez.

Por ejemplo, se les presentaba en una tarjeta el numeral “28” y los niños podían: Colocar veintiocho cubos sueltos, o dos tiras de diez y ocho sueltos, o una tira de diez y dieciocho sueltos. En otra parte del instrumento a los niños se les presentaron colecciones de objetos ordenadas de diferente forma:

- **Canónicamente:** cuando las tiras de diez cubos equivalían al número de decenas del numeral y el número de cubos sueltos a las unidades (Para “39”, tres tiras de diez y nueve cubos sueltos).
- **No canónicamente:** cuando las tiras de diez cubos equivalían a menos del número de decenas del numeral, y los cubos sueltos a más del de las unidades (Para “39”, dos tiras de diez y diecinueve cubos sueltos).
- **Engañosamente:** cuando la colección estaba ordenada en grupos uniformes distintos a diez (Para “39”, nueve grupos de cuatro cubos y tres sueltos).
- **No ordenados:** cuando solamente había elementos sueltos (Para “39”, treinta y nueve cubos sueltos).

En su estudio Ross (1990), detectó cinco niveles en el proceso de desarrollo del concepto:

1) *Numeral completo:* Cuando las niñas o niños consideraban que eran los dígitos juntos los que representaban la cantidad, sin que le atribuyeran ningún significado a los dígitos por separado.

Aquí ubicó la autora a los niños que consideraban que el numeral completo representaba la cantidad total y que los números representados por los dígitos individuales no tenían ningún significado; por ejemplo, cuando a un niño de este nivel se le preguntaba si el tres del “39” equivalía a alguna cantidad de los objetos que había contado, él decía que no, que solamente unido al nueve representaban la cantidad total (treinta y nueve).

2) *Propiedad posicional:* Cuando los niños sabían que en un numeral de dos dígitos, el de la derecha estaba en el lugar de las unidades (unos) y el de la izquierda en el de las decenas

(dieces), pero ese conocimiento se limitaba al *nombre* del lugar y no se vinculaba con cantidades.

En este caso a un niño que se le presentará el numeral escrito “39” podría decir que el “3” estaba en el lugar de las decenas y representaba tres de ellas, y el “9” en el de las unidades y representaba nueve. Sin embargo, cuando contaba una colección de treinta y nueve objetos, no podía identificar qué parte de la colección equivalía a cada uno de los dígitos, y solo sabía que la colección total equivalía a “39”.

3) *Valor aparente (face value)*: Cuando los niños le atribuían a los dígitos el valor absoluto de la cantidad que representaban independientemente de su posición. Podían considerar que ambos dígitos representaban unidades por separado, o que cada uno de los dígitos representa a un tipo de elementos diferentes, incluso decenas y unidades. De lo que no eran capaces era concebir que el número representado por el dígito de las decenas equivale con agrupaciones uniformes (múltiplos de diez) de las unidades representadas por el otro dígito.

Los sujetos que la autora ubicó en este nivel podían responder que en el caso de “39”, el “3” representaba tres cubos sueltos y el “9” nueve. Otra respuesta que podían dar era que “3” se refería solamente a tres tiras (que no a tres tiras de diez) y el “9” a nueve cubos sueltos. Estos niños, al referirse a las tiras (decenas) no pensaban en el número de elementos que las conformaban, sino solamente en ellas “como una cosa diferente de los cubos sueltos”. Los niños de este nivel podían dar respuestas correctas cuando se les presentaban colecciones de tiras y cubos canónicamente ordenadas, pero cuando eran colecciones engañosamente ordenadas (como la que arriba describimos) los niños podían responder que el “9” del “39” se refería a las nueve agrupaciones y el “3” a los tres elementos sueltos.

4) *Zona de construcción (o de transición)*: Cuando los niños sabían que el dígito de la izquierda en el numeral representaba conjuntos de diez objetos y el de la derecha los sobrantes, pero su conocimiento aún no era del todo firme y confiable.

Ross (1990), ubicó en este nivel a los niños que se encontraban entre el *valor aparente* y la *comprensión*. Algunos de estos niños podían reconocer las equivalencias correctas cuando se trataba de colecciones canónicamente ordenadas y no ordenadas, pero dudaban o tenían problemas cuando las colecciones estaban ordenadas no canónicamente o engañosamente. Incluso podían dar algunas respuestas de *valor aparente*.

5) *Comprensión*: Cuando los niños conocían el valor de los dígitos de un numeral de manera firme y confiable.

En este nivel la autora ubicó a quienes podían dar respuestas correctas cuando lidiaban con los cuatro tipos de colecciones.

Entre los resultados que obtuvo Ross, encontró que de una muestra de veintiséis niños de cuarto grado, dos (7.69%) se encontraban en el nivel de *numeral completo*, diez (38.46%) en el de *valor aparente*, dos (7.69%) en el nivel de *zona de construcción* y doce (46.15%) en el de *comprensión*.

El trabajo de Ross ha sido utilizado por otros investigadores para estudiar el desarrollo del concepto de valor posicional, tanto para confrontar los descubrimientos de la autora (Thornton, 1990; citado en: Jones y Thornton, 1993), como en estudios que han estado encaminados a detectar las diferencias en el aprendizaje aritmético en culturas distintas (Miura et al., 1993; Miura y Okamoto, 1989).

En este estudio, se tomaron como base los hallazgos de Ross, ya que se desarrolló el concepto del valor posicional de acuerdo a las cinco etapas mencionadas en dicho estudio, por otra parte las características de la muestra coinciden con las tomadas en esta investigación. Una vez desarrollado el concepto del valor posicional en los niños, se procederá a realizar la clasificación del nivel en el que se encontraron los niños.

2.6.1 Jones, et al. (1993, 1994, 1996). Una propuesta Integrada

En su trabajo, Jones y su equipo (Jones, Thornton, y Putt, 1994; Jones, et al. 1996; Jones y Thornton, 1993) partieron de la preocupación por diseñar un modelo que, contemplando diferentes perspectivas, mostrara los niveles de desarrollo en la conceptualización de los números de varios dígitos, y que sirviera para orientar la instrucción en torno a los mismos. Estos autores consideraron que había cuatro habilidades que estaban directamente relacionadas con la operación del sistema de numeración de valor posicional, las cuales eran: contar, partir, agrupar y relacionar números. Según ellos, esas habilidades evolucionaban paralelamente en la comprensión del sistema. En el modelo que propusieron estos autores, se preocuparon por definir el estado que guardaría cada una de las cuatro habilidades, en cinco niveles de desarrollo, los cuales eran: 1) *previo al valor posicional*, 2) *inicio del valor posicional*, 3) *desarrollando el valor posicional*, 4) *valor posicional extendido* y 5) *valor posicional esencial*. El modelo fue probado y validado trabajando en estudios de caso con muestras de entre cuatro y seis alumnos de los primeros tres grados de primaria.

El instrumento que emplearon los autores consistió en la elaboración de problemas (basados en una historia) que requerían para su resolución de la adquisición de una de las cuatro

habilidades, en los márgenes respectivos a alguno de los cinco niveles. De esta forma elaboraron 20 problemas; uno para cada habilidad de cada nivel.

Según los autores, el desempeño necesario para mostrar la adquisición de una de las cuatro habilidades en cada uno de los cinco niveles, era el siguiente:

Nivel 1: Previo al valor posicional

Para estar en este nivel, en general, era necesario que las niñas y niños fueran capaces de operar usando unidades simples. Las habilidades que estaban directamente relacionadas con la operación del sistema de numeración de valor posicional se definen a continuación:

Habilidad de conteo: El conteo es el método más fiable para determinar la numerosidad exacta de una serie y la relación numérica entre series.

Habilidad de partición: La partición consiste en otorgar la categoría de contado o no contado formando dos grupos entre el conjunto de objetos que se quieren contar. Esto se realiza generalmente señalando el objeto, agrupándolo a un lado o bien a través de la memoria visual.

Habilidad de agrupar: Agrupar es el primer paso en aprender y entender que los números representan objetos. Los niños pueden aprender a agrupar y clasificar objetos por su tamaño, figura, textura, o color, o por la forma en que se mueven.

Habilidad de relacionar números: El conjunto de números naturales es ordenado, es decir, dados dos naturales cualesquiera, uno de ellos es menor que otro. Los símbolos que se utilizan para establecer la relación de orden entre dos números son:

$a < b$ *a es menor que b*

$a \leq b$ *a es menor o igual que b*

$a > b$ *a es mayor que b*

$a \geq b$ *a es mayor o igual que b*

- Conteo

En este caso los niños tenían que poder contar, de uno en uno, a partir de una cantidad dada (contar doce a partir de quince). También debían poder contar informalmente de diez en diez.

El problema con el que se les confrontó a los niños para reconocer la adquisición de la habilidad de contar (respectiva a este nivel) fue: Jorge el Curioso se asomó a través de una gran ventana y vio 18 flores azules y tres amarillas. ¿Cuántas flores vio?

- Partición

En este nivel, los niños debían ser capaces de contar informalmente de diez en diez y de formar de diferentes maneras números como el “cinco”, el “ocho” y el “diez”.

El problema correspondiente era: El hombre del sombrero amarillo agitó sus dos bolsas y le dijo a Jorge: Yo tenía diez caramelos y puse algunos en una bolsa y el resto en otra, ¿me podrías decir cuántos caramelos puede haber en cada bolsa?

- Agrupamiento

En este nivel los niños debían poder estimar el número de objetos en un grupo utilizando el 10 y el 5 como referencias, también debían poder contar de cinco en cinco o de diez en diez, y agrupar una colección para que pudiera ser contada fácil y rápidamente.

El problema, en este caso, consistía en presentarles un grupo de cinco crayolas a los niños, diciéndoles cuántas eran. Posteriormente se les pedía que tomaran un grupo grande de crayolas

de una caja y se les solicitaba que estimaran cuántas habían tomado. A continuación se les pedía que las contaran y que las agruparan de forma que fuera más fácil contarlas. Todo esto se les pedía que lo hicieran para ayudarle a “Jorge el Curioso”.

- Relación de números

En este caso, el desarrollo de la habilidad exigía que los niños pudieran determinar si un número (entre el 1 y el 10) era mayor o menor que 5 o 10, y también qué tan mayor o menor era (mucho o poco).

En el problema correspondiente se les decía: Jorge fue a la feria. Podía ganar premios girando una ruleta y diciendo qué tan mayores o menores eran los números del *cinco*. Ayúdale a Jorge girando la ruleta y averiguando qué tan mayor o menor es el número que sale del *cinco*” (la ruleta tenía los siguientes números: 2, 3, 4, 6, 7 y 8).

Nivel 2: Inicio del valor posicional

En este nivel los niños pasaban de utilizar solamente unidades simples, a usar al diez como unidad compuesta.

- Conteo

En este nivel los niños debían ser capaces de contar grupos de diez como si fueran unidades sencillas (Diez, veinte, treinta, etc.). También debían ser capaces de formar y contar grupos de diez y sobrantes (Reconocer las decenas y las unidades).

Además debían poder contar, cuando se les presentaban por separado, decenas y unidades.

El problema que se les presentaba era: A Jorge le dio curiosidad y se acercó a las flores. Cada flor tenía diez pétalos. Jorge encontró dos flores y dos pétalos sueltos. ¿Cuántos pétalos eran en total?... Después se encontró otra flor; ¿ahora cuántos pétalos son?

- Partición

En este nivel los niños debían ser capaces de formar de diferentes maneras números de dos dígitos, sobre todo en agrupaciones de dieces y unos. También debían ser capaces de formar una centena usando decenas.

En el problema se les decía: El hombre del sombrero amarillo llevó a Jorge a comprar caramelos para una fiesta. Le dijo a Jorge que los caramelos se podían comprar sueltos o en paquetes de diez. Luego le preguntó: ¿si necesitamos 68, puedes decirme diferentes formas en las que los podríamos comprar? (Se le pedía al niño que ayudara a Jorge a resolver el problema).

- Agrupamiento

En este nivel los niños debían ser capaces de estimar el número de objetos en un grupo usando “la unidad apropiada” (generalmente la decena). También debían recurrir al conteo para corroborar si su estimación había sido correcta y ser capaces de agrupar para facilitar la corroboración.

En el problema se le decía a los niños: El encargado de la tienda le pidió a Jorge que tomara dos puños de frijoles. Haz lo que hizo Jorge. ¿Como cuántos frijoles tomaste? Cuéntalos. ¿Cómo podrías colocarlos para que fueran fáciles y rápidos de contar?

- Relación de números

En este caso los niños debían ser capaces de ordenar números de dos dígitos (mayor que y menor que) ya fuera por decenas ($35 > 25$) o entre decenas ($35 < 37$).

El problema que se les presentaba era: En otro puesto de la feria, Jorge podía ganar un premio si descubría cuáles de los números que estaban entre el “60” y el “69” se hacían más grandes si se invertían los dígitos. ¿Con qué números ganaría Jorge los premios?

Nivel 3: Desarrollando el valor posicional

De forma general, este nivel requería que los niños fueran capaces de operar con números de dos dígitos, conceptualizando a las decenas como unidades compuestas que podían ser descompuestas o recompuestas en (y por) unidades sencillas.

- Conteo

En este nivel los niños debían de ser capaces de contar progresiva o regresivamente para sumar o restar mentalmente.

En el problema se les decía: El lunes Jorge contó 33 pétalos. El martes 30 más.

¿Cuántos contó en total?

- Partición

Los niños que hubieran alcanzado el desarrollo de la habilidad en este nivel debían ser capaces de formar números de diferentes formas (canónica y no canónicamente), sobre todo si eran menores a cien. También debían ser capaces de encontrar lo que le faltaba a un número para ser otro, cuando ambos eran menores a cien.

El problema que se les presentaba era el siguiente: A Jorge le dio curiosidad cuando escuchó a la señora del abrigo rosa decir que tenía 64 caramelos pero que necesitaba tener 87. ¿Cuántos caramelos le faltaban a la señora?

- Agrupamiento

Para alcanzar el desarrollo respectivo a este nivel de la habilidad de agrupar, los niños debían poder determinar si un número estaba dentro del rango de alguna decena (Si el “37” estaba dentro de los treintas).

El problema que se les presentaba era el siguiente: Jorge quería dos juguetes de la tienda, uno costaba 34 pesos y el otro 25. A Jorge le dio curiosidad: ¿estaría el costo total de los juguetes en los 40tas, 50tas o 60tas? ¿Tú qué le dirías a Jorge?

Explícame.”

- Relación de números

En este nivel los niños debían ser capaces de ordenar números de dos dígitos (mayor que y menor que), sobre todo cuando se invertía el orden de los dígitos del numeral.

En el problema se les decía: En un juego de la feria, cada pelota estaba marcada con números entre 11 y 99. Jorge recogió dos bolas y sumó los números.

Después invirtió los dígitos de los dos números y los volvió a sumar. Haz lo que hizo Jorge y di qué suma es mayor.

Nivel 4: Valor posicional extendido

En este nivel, las mismas habilidades que en el anterior se requerían para trabajar con números de dos dígitos, ahora debían poder aplicarse en la operación de números de tres dígitos.

- **Conteo**

En este nivel los niños debían ser capaces de “contar a partir de” usando centenas (apoyándose en material concreto). Debían también ser capaces de “contar a partir de” usando decenas para resolver sumas mentalmente (sin usar material).

En el problema se les decía: Al final de una semana, Jorge el Curioso había contado 172 pétalos. Durante ese fin de semana contó 210 más. ¿Cuántos pétalos contó en total?

- **Partición**

En este nivel los niños debían poder formar números multidígito (muchos hasta el mil) de diferentes maneras (Canónica y no canónicamente). También debían ser capaces de encontrar la parte faltante de un número, incluso de tres dígitos.

En el problema se les decía: Jorge vio trabajar toda la mañana al señor del sombrero amarillo. Había envuelto (en paquetes de 10) 134 caramelos para darlos de premios, pero necesitaba 260. Jorge quería saber: ¿cuántos le faltaban envolver?

- **Agrupamiento**

En este nivel los niños debían ser capaces de determinar si la suma de dos números de tres dígitos era mayor o menor a otro número.

También debían ser capaces de determinar, sin usar ningún tipo de material concreto, cuántas unidades se formaban con una combinación de decenas y unidades, aunque no fuera canónica (¿31 decenas y 12 unidades, cuántas unidades son?).

El problema respectivo era: Jorge tiene 270 estampas. Compró dos álbunes: uno era para 132 estampas y el otro para 145. Jorge quería saber si le cabrían todas sus estampas en los dos álbunes.

- Relación de números

En este nivel los niños debían ser capaces de ordenar números multidígitos, incluso aquellos hasta mil, formados al intercambiar los dígitos.

En el problema se les decía: Otro juego en la feria consistía en escribir números de forma que cuando se invirtieran los dígitos para formar un nuevo número, y se le sumara al primero, la suma estuviera entre 100 y 125 [$83 + 38 = 121$]. ¿Con qué números podría ganar Jorge?

Nivel 5: Valor posicional esencial

En este nivel la competencia de los niños en el manejo de los números de tres dígitos debía ser completa. También debían ser capaces de poder aplicar esas habilidades al trabajar con números de cuatro dígitos o más.

- Conteo

En este nivel los niños debían ser capaces de contar progresiva o regresivamente usando centenas decenas y unidades. También debían ser capaces de utilizarlas para restar mentalmente.

El problema respectivo era: Jorge había recogido 582 pétalos. Contó 168 y se los dio al señor del sombrero amarillo. Jorge quería saber cuántos le habían quedado.

- Partición

Aquí los niños debían poder formar números multidígitos, incluso mayores a 1000, de diferentes formas (canónica y no canónicamente).

En el problema se les decía: El señor de la tienda le dijo a Jorge que podía comprar los caramelos sueltos, en paquetes de 10 cada uno o en cajas de 100. Si necesitaba 804, ¿de qué formas diferentes podía comprarlos? Después se dio cuenta que iba a necesitar 1200. ¿Cuántos más tenía que comprar?

- Agrupamiento

En este nivel los niños debían ser capaces de determinar si la suma o diferencia de dos números, de dos o tres dígitos, era mayor o menor a otro número. También debían ser capaces de determinar, sin usar ningún tipo de material concreto, cuántas unidades se formaban con una combinación de centenas, decenas y unidades, aunque no fuera canónica

En el problema se les decía: El señor de la tienda le dijo a Jorge que se asomara a la bolsa para ver los dulces. Había dulces sueltos, paquetes de diez y cajas de cien. Jorge contó 2 cajas, 23 paquetes y nueve dulces sueltos. Jorge quería saber ¿cuántos dulces había ahí?

En cuanto a la equivalencia entre las habilidades en un mismo nivel, ésta también pareció ser aceptable, ya que por lo general, cuando un niño era capaz de responder algún problema de cierto nivel de alguna de las habilidades, también podía con los problemas de las otras en ese mismo nivel.

Relación de números

Los sujetos debían poder determinar, de dos números de tres dígitos, cual de ellos se encontraba más cerca de un tercero intermedio (ver problema como ejemplo).

El problema presentado era: “Jorge vio en la feria una computadora que mostraba casas que estaban en una larga fila. Las casas estaban numeradas empezando por el 325. Jorge apretó un botón y lo llevó a la casa 418. ¿Estaba Jorge más cerca de la casa 372 o de la 485? ¿Cómo sabes?”

Entre los hallazgos que hicieron los autores, descubrieron que los niveles de dificultad sobre los que se basaban los problemas que le planteaban a los sujetos eran consistentes, ya que si una niña o niño podía resolver un problema de cierto nivel, también podía resolver los de los niveles anteriores. De igual forma, si era incapaz de responder un problema, tampoco podía con los de niveles superiores.

En cuanto a la equivalencia entre las habilidades en un mismo nivel, ésta también pareció ser aceptable, ya que por lo general, cuando un niño era capaz de responder algún problema de cierto nivel de alguna de las habilidades, también podía con los problemas de las otras en ese mismo nivel.

El valor posicional, es muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, ya que nos permite realizar numerosos cálculos y resolver problemas de la vida cotidiana. Se considero fundamental incluir en esta investigación, el estudio realizado por Jones, et al. (1993, 1994, 1996), ya que presenta problemas aplicados a la vida real, acerca de las habilidades de contar, partir, agrupar y relacionar números, para cada nivel. El total de los niveles fueron cinco, en el primer nivel, se comenzó operando con unidades simples, en el segundo nivel se continuo

operando con unidades simples y se uso el diez como unidad compuesta, en el tercer nivel se opero con números de dos dígitos, en el cuarto nivel se comenzó a operar con centenas y en el quinto nivel se esperaba que manejaran correctamente los números de tres digito. Así pues, se pudo ubicar al niño en alguno de estos niveles.

CAPÍTULO 3

3.1 Tipo de estudio

Este estudio se basó en una metodología de enfoque cualitativa, de corte exploratorio, sobre cómo conceptualizan los alumnos de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona el valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal. Con ello se partió de que el esfuerzo debía orientarse a la descripción compleja de una problemática, sin que fuese especialmente relevante la magnitud exacta de su presencia en una población más allá de la estudiada. Este hecho determinó la selección de la muestra, las categorías de análisis y los instrumentos que se utilizaron.

Taylor y Bogdan (1992) señalan que lo que define la metodología es simultáneamente tanto la manera cómo enfocamos los problemas, como la forma en que le buscamos las respuestas a los mismos.

3.2 Población

La población está formada por un grupo de treinta y tres niños del cuarto grado de la escuela Sotero Barahona, ubicada en la aldea El Hatillo, Municipio del Distrito Central, en dicha escuela solo existe una jornada, la cual funciona por la mañana. Y la sección del cuarto grado es única.

Se eligió trabajar con alumnos que pudieran ser considerados lo menos desiguales posibles, en el sentido de que no fueran escuelas beneficiadas con las características abajo mencionadas, a fin de que los resultados obtenidos permitieran suponer su posible presencia en poblaciones mayores, sin que se pretendiera nunca la precisión de las inferencias u otros métodos estadísticos. Esto hizo preferir una escuela pública con las siguientes características:

- ✓ Que no perteneciera a una zona especialmente marginada; de modo que un bajo rendimiento en los alumnos pudiera ser atribuido a condiciones de pobreza o marginación social extremas.
- ✓ Que no fuese una escuela especialmente favorecida, ya sea con: programas de capacitación y apoyo didáctico para maestros, poblaciones pequeñas en los salones, recursos especiales por parte de la autoridad educativa entre otras, de forma que no se pudiera suponer que los resultados obtenidos pudieran ser compartidos solamente por alumnos de escuelas especiales.

3.3 Muestra

En cuanto a los niños que desarrollaron las actividades, se eligió trabajar con niños de cuarto grado ya que, según la literatura y el DCNB (Bednarz y Janvier, 1988; Jones, et al., 1996; Kamii, 1992; Ross, 1990), es a lo largo de esos tres años (segundo, tercero y cuarto grado) que la mayoría de los niños construyen el concepto de valor posicional; mientras que en primer grado son muy pocos los niños que han iniciado propiamente su construcción (casi todos están aún trabajando con las “unidades simples”; Steffe, Cobb, y Glasersfeld, 1988) en quinto año la mayoría ya lo han adquirido (Ross, 1990). La edad de todos los niños correspondía al grado que estaban cursando. En total se trabajó con doce niños (Ocho del sexo masculino y ocho del sexo femenino).

La selección de los niños (sin importar el sexo) se hizo aleatoriamente. Este tamaño de muestra se escogió partiendo del supuesto que muestras muy pequeñas (estudios de caso) no permiten detectar la diversidad en la forma que pueden operar diferentes niños. En sentido

opuesto, mientras más grande es una muestra, más obligado está el investigador a recurrir a interpretaciones cuantitativas (e instrumentos que las permitan), en detrimento del análisis cualitativo. Así pues, consideré que con doce niños, lograría indagar la conceptualización que sobre el valor posicional posee cada niño, pero al mismo tiempo aseguraría obtener suficiente diversidad para formarse una idea general de las similitudes y diferencias entre sujetos.

3.4 Plan para la recolección de información

Para la recolección de información se aplicó una prueba diagnóstica, se desarrollaron una serie de actividades de aprendizaje, además se recolectó información por medio de videos los cuales proporcionaron un aporte valioso para la realización del análisis.

3.4.1 Prueba Diagnóstica.

La prueba diagnóstica (Ver Anexo 1) se realizó con un grupo de treinta y tres niños de cuarto grado, y se aplicó con el objetivo de tener un estudio acerca de la comprensión que los alumnos tenían acerca del tema y además proporcionar información sobre posibles deficiencias en los niños al trabajar con el concepto del valor posicional, así como de la existencia de conocimientos errados.

Se realizó un piloteo con distintos niños a fin de detectar cuáles eran las actividades que mejor se acoplaban a los fines que se habían planteado. El piloteo se realizó en dos momentos, el primero de los cuales fue exploratorio y consistió en aplicar el instrumento completo por

separado a catorce niños. El segundo momento consistió en construir un instrumento con las actividades que mejor resultado habían dado y probar su eficiencia con cinco niños.

Dicho instrumento produjo excelentes resultados, así que se validó como prueba diagnóstica, la cual consistió en trece problemas que involucraban la conceptualización del valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal. Finalmente se aplicó a un grupo de dieciséis niños

En esta etapa se analizó el rendimiento del alumno, con el propósito de explorar los conocimientos que poseían, las estrategias aplicadas para resolver el problema, los errores más comunes y las dificultades que poseían los niños al trabajar el concepto del valor posicional.

El instrumento se aplicó el 23 de septiembre, del 2010 con una duración de 40 minutos, en la Escuela Sotero Barahona de la Aldea el Hatillo

3.4.2 Actividades de Aprendizaje

Las actividades de aprendizaje se desarrollaron en base a hojas de trabajo y actividades lúdicas, las cuales se realizaron de forma individual y grupal. En las hojas de trabajo se les presentaron problemas de cómo desarrollar el concepto del valor posicional, donde se le daba lectura y comprensión, cuando se realizaba en grupo. En seguida cada grupo realizaba la discusión y luego socializaban el procedimiento y respuesta con los demás grupos, llegando a una conclusión final del análisis y respuesta correcta de cada problema. Algunas actividades las realizaron individualmente, y de igual forma se discutió el procedimiento y la respuesta final.

El papel que jugó la investigadora fue el de facilitadora del conocimiento y sirvió como guía en el proceso de aprendizaje, induciendo a los niños a través de preguntas, para llegar a la respuesta correcta. En ningún momento les proporcionó la respuesta, ya que el objetivo era que ellos desarrollaran el concepto del valor posicional y crearan estrategias en el desarrollo de cada actividad. El enfoque utilizado fue el constructivista, ya que este nos permite construir el conocimiento a través de experiencias previas.

Las actividades presentadas en esta investigación en torno al desarrollo del valor posicional, se desarrollaron a partir de la teoría de Ross, en la cual se mencionan cinco etapas para el desarrollo, las cuales son: Numeral completo, propiedad posicional, valor aparente, zona de construcción y comprensión.

El objetivo de las actividades de aprendizaje (Ver Anexo 2), era desarrollar en el niño el concepto del valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal, así como el identificar en qué nivel estaba el niño del proceso de desarrollo y como adquieren y construyen el sentido numérico.

Para el diseño de las actividades de aprendizaje se basó en los objetivos planteados. Partiendo de ellos se procuró que el instrumento cumpliera con las siguientes características:

1. Que incluyera actividades distintas que aportaran diversidad en la información respecto a la forma en que los niños comprenden el concepto de valor posicional.
2. Que las actividades planteadas permitieran ubicar al niño en un nivel definido de desarrollo del concepto, para facilitar la comparación entre los niños.

3. Que el esfuerzo que las actividades implicaran para el niño, retribuyera la mayor cantidad posible de información, de forma que se aprovechara al máximo el desgaste del niño a lo largo de la aplicación.
4. Que el instrumento pudiera ser aplicado en un máximo de dieciséis sesiones, para evitar el desgaste mental en el niño.
5. Que las actividades presentadas permitan describir las estrategias utilizadas por el niño en la conceptualización del valor posicional en la escritura de números en el sistema decimal.

El tema de investigación se desarrolló dentro de la clase de matemática, por lo que no se presentó ningún problema para llevarla a cabo.

En total se realizaron dieciséis actividades y para conocer que tanto los niños habían adquirido el concepto del valor posicional se aplicó una evaluación final, la cual estaba compuesta por la actividad trece. Las actividades se realizaron a partir del 27 de septiembre, en sesiones de dos horas, de lunes a viernes y concluyeron el 27 de octubre del 2010.

3.4.3 Técnica de Observación

Se hizo grabación de videos (Ver Anexo 4) para las actividades de aprendizaje realizadas por los niños, la cual fue de gran importancia para el análisis, ya que se utilizan los sentidos, se realizan observaciones y acumulan hechos que ayudan tanto a la identificación de un problema como a su posterior resolución.

3.5 Plan de Análisis

El análisis se hizo en dos etapas, en la primera se analizó la prueba diagnóstica con el propósito de conocer las estrategias utilizadas por los alumnos al operar con el concepto del valor posicional, así como detectar los errores más comunes que se daban al operar con numerales de varios dígitos y las deficiencias que los niños poseían al aplicar el concepto.

En esta etapa resolvieron problemas encaminados al desarrollo del valor posicional. Para el análisis se emplearon varias categorías, como ser: Correcto, incorrecto y no contestaron. Además se describieron las estrategias utilizadas y se identificaron los errores más comunes y las dificultades presentadas en el desarrollo del problema. Se utilizó como apoyo el software de Excel, para calcular los porcentajes de cada frecuencia con la que daban respuesta a cada actividad presentada.

En la segunda etapa se estructuró una secuencia de actividades problemáticas, de la misma forma se pretendió que el alumno desarrollara una actividad cognitiva y diera respuesta a los objetivos planteados y preguntas de estudio, buscando que mediante las actividades presentadas adquirieran nuevas habilidades, el desarrollo de estrategias propias y de esta forma reforzaran sus conocimientos y desarrollaran el concepto del valor posicional más fácilmente.

El análisis de los resultados se realizó de acuerdo a las cinco etapas que describe Ross en su estudio, y finalmente se pretendía ubicar al niño en la etapa que se encontrara en el desarrollo del concepto del valor posicional. En esta etapa se observó el proceso y desarrollo de las actividades de forma grupal e individual al momento del desarrollo de las guías de trabajo. En

algunas actividades grupales se utilizó material concreto y semi-concreto, esto motivó a los niños a desarrollarlas con mayor empeño, ya que el material concreto es considerado un ente de motivación en el niño.

Finalmente se aplicó una actividad para verificar el avance que habían tenido los niños en torno al desarrollo de habilidades, creación de estrategias y así lograr desarrollar el concepto del valor posicional.

CAPÍTULO 4

ANALISIS Y DISCUSION DE LOS RESULTADOS

El análisis de los resultados de este estudio, se realizó de acuerdo a las etapas de Ross (1990). En la primera etapa que es la del Numeral completo, se aplicó la actividad No1. En la etapa de la propiedad posicional se realizó la actividad No2 y No3. Para la tercera etapa que es la de valor aparente, se aplicaron las actividades 5, 6, 7 y 8. En la cuarta etapa que corresponde a la zona de construcción se realizaron las actividades 9 y 10 y en la última etapa que corresponde a la de comprensión se aplicó las actividades 11 y 12, enfocándose en el desarrollo del concepto del valor posicional. Además se pretendía verificar si los niños dominaban el tema y a la vez explorar las estrategias aplicadas. Además se pretendía conocer las dificultades y los errores más comunes al operar con numerales de dos dígitos.

En la etapa diagnóstica, se aplicaron instrumentos en bases a las habilidades que involucra el desarrollo del concepto del valor posicional, dichas habilidades son: El conteo, partición, agrupación y relación de números. El análisis se hizo describiendo las estrategias utilizadas, las dificultades presentadas y los errores más comunes al operar con numerales de varios dígitos. Finalmente se utilizaron frecuencias y porcentajes del número de niños que contestaron correcta, incorrectamente y los que no dieron respuesta alguna a lo que se les pedía.

En la etapa de ejecución se desarrollaron una serie de actividades encaminadas al desarrollo del concepto del valor posicional, al afianzamiento de las habilidades involucradas en el desarrollo del concepto, así como la creación de estrategias propias por parte del niño y la adquisición de nuevas habilidades.

A continuación se detalla de forma más específica y profunda la comprensión lograda por los niños en los niveles del proceso de desarrollo del concepto del valor posicional, los errores más comunes, dificultades y la creación de estrategias propias.

4.1 prueba diagnóstica (ver Anexo 1)

A continuación se presentan los resultados obtenidos en esta prueba diagnóstica

Problema 1

Pedro tiene 21 ovejas en su rebaño, cada mañana cuida de ellas y por la tarde va a la escuela



- a) ¿Cuántos dígitos tiene el número que representa la cantidad de ovejas?
- b) Indique la posición de cada dígito

Los resultados obtenidos de este primer problema del inciso a) son los siguientes:

Cuadro No1

Resultados del problema 1.a

<i>Respuesta</i>	<i>Reactivo</i>	<i>Porcentajes</i>
	<i>1.a</i>	
Correctas	4	16%
Incorrectas	20	80%
No contestaron	1	4%

De un total de 25 alumnos a los que se les aplicó la prueba diagnóstica, el significado que poseen sobre lo que es un dígito se muestra en las respuestas que dieron a conocer.

Solamente el 4% no respondió a la pregunta. Los que dieron respuestas tal como se esperaba representa un porcentaje del 16%. Del total de las respuestas, el 80% contestaron a la interrogante de forma incorrecta ya que se esperaba que los niños respondieran “hay dos dígitos”. Los niños que contestaron correctamente consideran que el numeral completo representa la cantidad total y que los números representados por los dígitos individuales no tienen ningún significado. Observemos el caso de Jaime.

R21 Tiene 2 digitos
R21 el primero es 2 y el segundo es 1

Figura 1

Cuadro No2

Resultados del problema 1.b

<i>Respuesta</i>	<i>Reactivo</i>	<i>Porcentajes</i>
	<i>1.b</i>	
Correctas	3	12%
Incorrectas	18	72%
No contestaron	4	16%

El objetivo de este problema era determinar si el alumno conocía la posición de las decenas y las unidades. El 72% respondieron de manera no satisfactoria. El 16% no dio ninguna respuesta. Del 12%, un porcentaje del 4% respondió situaciones como se esperaba, que la “posición del primer dígito es de dos decenas y la posición del segundo dígito es de una unidad”. El 8% de los niños no conocían el concepto del valor posicional de los dígitos, solo manejaban la posición en la que esta cada dígito de manera ordinal. Según Kamii (1992), el valor posicional se basa en la idea que es posible adquirir el concepto haciendo abstracciones de las *cualidades numéricas de conjuntos o colecciones*. Esto es, que “el ser una decena” es un “hecho numérico” propio de un conjunto de diez objetos; algo que “objetivamente existe” en el conjunto, y que puede ser aprehendido a través de realizar abstracciones de lo que se observa.

Para el caso la alumna Dayana, sabe la posición en la que está ubicado cada dígito de manera ordinal, pero no la sabe expresar en términos del concepto del valor posicional.

el número 02 primero y luego el 1 = 21

Figura 2

Problema 2:

Catalina observa la siguiente promoción de hamburguesas



¿Cuál es el mayor número a que hace referencia el aviso, 20 o 25? ¿Cuál es el menor número?

Cuadro No3

Resultados del problema 2

Número Mayor y número menor

	<i>Reactivo</i>	
<i>Respuesta</i>	<i>2</i>	<i>Porcentajes</i>
Correctos	15	60%
Incorrectos	10	40%

Todos los alumnos dieron respuesta a la pregunta, y menos del 50% de los niños respondió de forma errónea. Estos resultados nos muestran que los niños tienen debilidades aún en la comparación de cantidades muy sencillas.

Más del 50% de los niños contestó como se esperaba, que la cantidad mayor es 25 y la menor es 20.

Cuando se pretende ordenar o seriar concentrándose en la posición de un elemento respecto de otro nos referimos al contexto ordinal, del cual se percibe que no tienen conocimiento los niños.

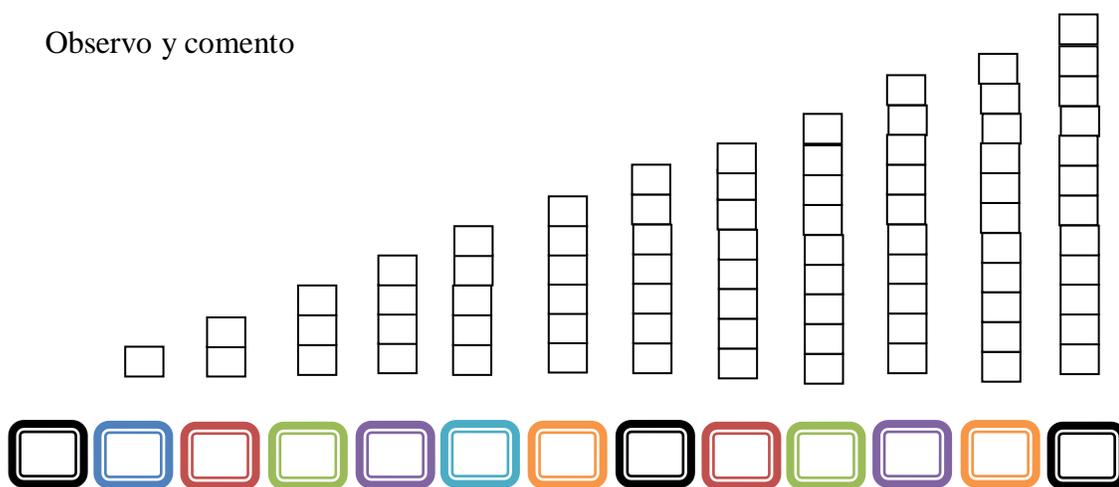
En el caso de Jony, fue bien explícito al momento de contestar la pregunta.

*El número mayor es de 25 que dice martes y jueves.
El número menor es el de 20 limpieza que dice 37
menos de compras.*

Figura 3

Problema 3

Observo y comento



- a) Escriba los números de los cuadrados en las casillas
- b) ¿Cuántas decenas y unidades tienen los números 10 y 12?

Cuadro No4

Resultados del problema 3.a

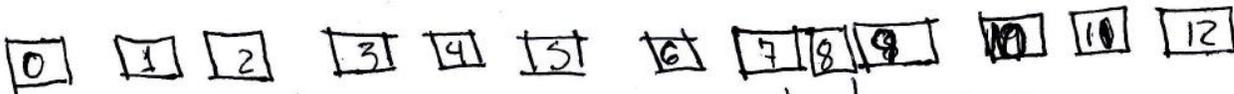
Números de los cuadrados en las casillas

<i>No de casillas</i> <i>Categoría</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Correcto	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
Incorrecto	4	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
No contestaron	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

El 72% contestó correctamente. El 16% dio respuestas erróneas y solamente el 12% no contestó en ninguna de las casillas. Podemos observar que el 12% de los niños no llenaron la casilla del cero, esto significa que no manejan el concepto del cero, como la ausencia de cantidad en el conteo de objetos.

En los sistemas posicionales el cero cumple una función esencial ya que cuando forma parte de un número de dos o más cifras plantea, al mismo tiempo la ausencia de elementos y la presencia de una posición. Por ello constituye a su vez un problema y un elemento a trabajar (Lerner, D., 1992).

Observemos el caso de Jaime, le asignó a la primera casilla el número cero, esto significa relacionó el numero de objetos, con el número correspondiente a la casilla.



 En el primer cuadro, el número correspondiente es 0 porque no hay ninguna casilla.

Figura 4

Cuadro No5

Resultados del problema 3.b

<i>Cantidad</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Unidades y decenas del número diez	1	10	14	25
Unidades y Decenas del número doce	0	11	14	4%

Observemos el cuadro anterior, ningún niño contestó de manera correcta la posición de las decenas y de las unidades que posee el número 12. El 56% no dió respuesta a la pregunta anterior. Esto nos muestra las deficiencias que poseen los niños en la conceptualización del valor posicional de un número. El 40% de los niños contestó incorrectamente a cantidad de decenas y unidades con respecto al número diez.

Se les preguntaba si el 1 del 12 equivale a alguna cantidad de los números representados, decían que no, porque solamente unido al dos representaba la cantidad total. Esto implica que

están en el nivel del numeral completo del proceso de desarrollo del concepto del valor posicional.

En el caso de Maryori, analizó la cantidad de decenas y unidades de forma agrupada y sin agrupar, al manifestar que el número 10 tiene una decena, pero no mencionó la cantidad de unidades, ya que el número diez tiene cero unidades en forma agrupada. Lo mismo sucedió para el número 12. Su respuesta fue la siguiente:

el número 10 tiene una decena y 0 unidades
y el " 12 " una decena y 2 unidades

Figura 5

Problema 4

¿Cuántos animales hay en cada grupo?



Hay _____ gansos.

Hay ____ gansos y ____ gato.

Cuadro No5

Resultado del problema 5

<i>Cantidad</i>	<i>Respuestas</i>		<i>Total</i>	<i>Porcentajes</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>		
Gansos	12	13	25	96%
Gansos y gatos	24	1	25	4%

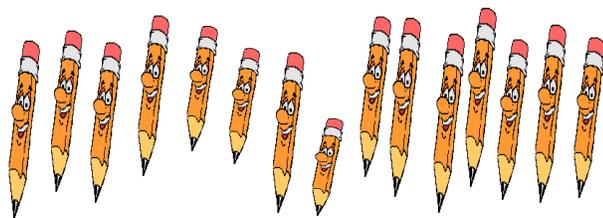
El 48% de los niños contestó correctamente a la cantidad de gansos y solamente el 4% respondió de forma no satisfactoria a la cantidad de gansos y gatos que hay en la figura propuesta. Esto nos muestra que los niños poseen dificultades al contar cantidades grandes con respecto a las cantidades pequeñas. Para el caso de Jaime, respondió correctamente la cantidad del número de gatos y gansos que había en la imagen y se equivocó al contar la cantidad de gansos ya que esta es mayor. En la cantidad de gansos pudo haber utilizado la estrategia de conteo de uno en uno o de cinco en cinco, para evitar equivocarse.

Hay 2 gansos y 1 gato.

Figura 6

Problema 5

Cuenta. ¿Cuántos lápices hay?



Hay _____ decenas y _____ unidades

Cuadro No6

Resultados del problema 5

<i>Cantidad</i>	<i>Respuestas</i>		<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	
Decenas de lápices	6	19	25
Unidades de lápices	6	19	25

El 24% de los niños respondió como se esperaba, tanto la cantidad de decenas como de unidades que habían de lápices. Y el resto, no supieron dar respuesta al problema. Como menciona, Bednarz y Janvier (1984): “Para la mayoría de los niños, un número es una alineación de dígitos. Palabras como centenas, decenas y unidades, no se toman en absoluto en consideración, o son asociadas con una fragmentación, un orden de escritura. Esto lleva a concluir que pocos niños dan una interpretación verdadera a la posición de los dígitos en términos de agrupación”. (P. 300).

Observemos el caso de Estephany, ella conoce el concepto de unidades, pero el concepto de las decenas lo toma como algo erróneo, al manifestar que las decenas son la totalidad de la cantidad.

Hay 15 decenas y 5 unidades

Figura 7

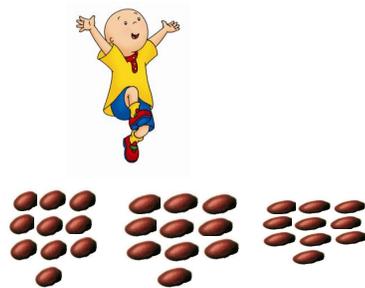
Problema 6

Observo y comento

María



José



Compara entre María y José la forma de contar los frijoles

- ¿Cómo los cuenta María? ¿Cómo los cuenta José?
- Cuenta los frijoles formando decenas y unidades

_____ decenas y _____ unidades.

_____ decenas y _____ unidades

Cuadro No7

Resultados del problema 6.a

<i>Estrategias</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Conteo de José	2	6	17	25
Conteo de María	2	6	17	25

Solamente el 8% de los niños contestó satisfactoriamente la forma de contar objetos.

Un alto porcentaje de niños no contestó la pregunta, esto nos muestra que los niños ni siquiera han adquirido la habilidad de agrupar objetos o sea que no han desarrollado la *Zona de construcción*: Que manifiesta que cuando los niños saben que el dígito de la izquierda en el numeral representa conjuntos de diez objetos y el de la derecha los sobrantes, pero su conocimiento aún no era del todo firme y confiable. Mientras que el 24% contestó no satisfactoriamente. En el sentido de que se esperaban respuestas tales como “María los cuenta de uno en uno y José los cuenta de diez en diez”.

Al parecer, Víctor Daniel no ha adquirido la habilidad del agrupamiento de objetos, ya que afirmó que María cuenta la cantidad de frijoles en grupo y José separados, se esperaban respuestas tales como, María los cuenta de diez en diez y José de uno en uno.

Cuadro No8

Resultados del problema 6.b

<i>Conteo</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Formando Decenas	8	16	1	25
Formando Unidades	4	20	1	25

El 32% de los niños contestó de manera satisfactoria a la cantidad de decenas de los frijoles que contó María y solamente el 16% dio respuesta correcta a la cantidad de unidades. El 64% contestó no satisfactoriamente las respuestas a la cantidad de decenas, con respecto a la cantidad de unidades que contó José el 80% contestó no satisfactoriamente. Solamente el 4% de los niños no dio respuesta a la cantidad de decenas y unidades.

Con respecto al alumno Kevin, se puede observar que maneja el significado de centenas, pero no el de las unidades, al responder que hay 2 decenas en la cantidad agrupada de frijoles que tiene María y no acertó en la cantidad de unidades. Lo mismo sucedió con respecto a la cantidad de frijoles que contó José.

2 decenas y 2 unidades.

2 decenas y 3 unidades

Figura 8

Resultados del problema 6.b

<i>Conteo</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Formando Decenas	7	15	3	25
Formando Unidades	5	15	5	25

El 60% dio respuesta no satisfactoria a la cantidad de decenas y unidades que José conto. El 28% de los niños contestó de forma satisfactoria a la cantidad de decenas que conto José, y el 20% de los niños contestó de manera no satisfactoria a la cantidad de unidades. El 12% de los niños no contestó a la cantidad de decenas y el 20% no dio respuesta a la cantidad de unidades.

Según Kamii (1992) el ser una decena es un “hecho numérico” propio de un conjunto de diez objetos; algo que “objetivamente existe” en el conjunto, y que puede ser aprehendido a través de realizar abstracciones de lo que se observa.

Con respecto a Esteban, conoce el valor de una decena, pero el valor de las unidades cuando se trata del cero lo toma como la ausencia de cantidad ya que al parecer no conoce el valor posicional.

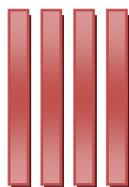


Figura 9

Problema 7

Dadas las siguientes decenas:

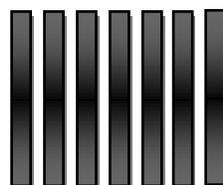
4 decenas



5 decenas



6 decenas



- a) ¿Cómo se dice la cantidad formada por 4, 5 y 6 decenas?
- b) ¿Cuántas unidades hay en 4, 5 y 6 decenas?

Cuadro No10

Resultados del problema 7.a

<i>Cantidad</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Formada por 4, 5 y 6 Decenas	0	22	3	25

Ningún niño contestó satisfactoriamente. Esto nos muestra que los niños al parecer no conocen la equivalencia de lo que es una decena o la cantidad de unidades que hay en una decena, ya

que se esperaban respuestas como, “Hay quince decenas o hay ciento cincuenta unidades”. El 12% no dio respuesta a la pregunta. El 88% de los niños contestó de manera no satisfactoria. Para Miguel, en una decena hay 10 unidades. Pero no maneja la Propiedad posicional: La cual afirma que cuando las niñas o niños saben que en un numeral de dos dígitos, el de la derecha está en el lugar de las unidades (unos) y el de la izquierda en el de las decenas (dieces), pero ese conocimiento se limita al nombre del lugar y no se vinculaba con cantidades.

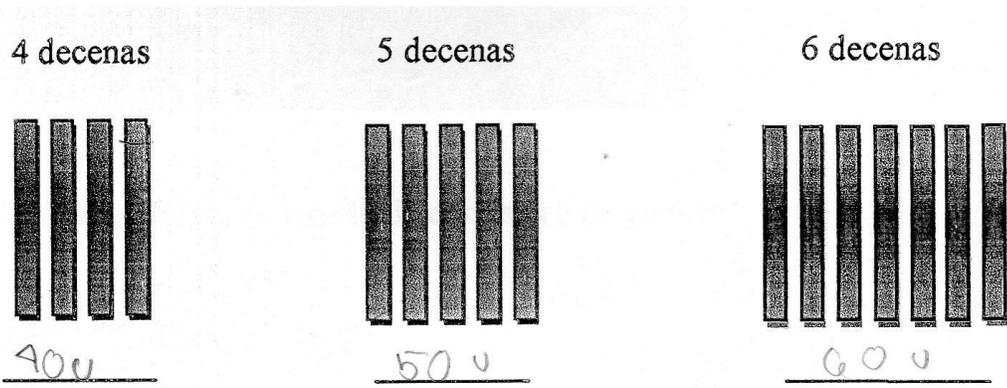


Figura 10

Problema 8

Cuál es el número formado por tres decenas y tres unidades:



Tres decenas

Tres unidades

Cuadro No11

Resultados del problema 8

<i>Número</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Formado por tres decenas y tres unidades	5	5	15	25

El objetivo de esta pregunta era conocer si el niño era capaz de identificar el número representado por una agrupación de objetos. Para esto tenía que conocer el valor posicional de los números.

Según la tabla anterior el 20% de los niños contestó como se esperaba, al responder hay 33 manzanas. El mismo porcentaje respondió no satisfactoriamente. Y el 60% no contestó la pregunta.

Observemos el caso de Carlos, contestó correctamente a la cantidad de manzanas que habían en tres decenas y tres unidades agrupadas, al manifestar que habían 33.

es el 33, porque tres decenas son 30 unidades
y se le suman las tres unidades.

Figura 11

Problema 9

Cuál de los siguientes dígitos tienen mayor valor posicional

- a) En las siguientes cantidades 1,345 y 937

Entre el 1 y el 9 ¿Cuál tiene mayor valor posicional?

- b) En las siguientes cantidades 39,728 y 94,715

Entre el 7 de la primera cantidad y el 7 de la segunda cantidad ¿Cuál tiene mayor valor posicional?

Entre el 8 y el 5 ¿Cuál tiene menor valor posicional?

Entre el 9 de la primera cantidad y el 9 de la segunda cantidad ¿Cuál tiene mayor valor posicional?

Cuadro No12

Resultados del problema 9.a

<i>Valor posicional</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Mayor valor posicional entre el 1 y 9	8	13	4	25

El objetivo de este problema fue explorar los conocimientos que los niños poseen acerca del concepto de valor posicional. De la tabla anterior tenemos que el 32% de los niños contestó de manera satisfactoria. El 16% de los niños ni siquiera proporciono evidencia de lo que es el valor posicional de un número. Y el 52% respondió de forma no satisfactoria.

Esto nos indica que los niños no conocen la propiedad del *Valor aparente*: Que se da cuando los niños atribuían a los dígitos el valor absoluto de la cantidad que representaban independientemente de su posición. Podían considerar que ambos dígitos representaban unidades por separado, o que cada uno de los dígitos representa a un tipo de elementos diferentes, incluso decenas y unidades. De lo que no eran capaces era de concebir que el número representado por el dígito de las decenas equivaliera a agrupaciones uniformes (múltiplos de diez) de las unidades representadas por el otro dígito.

En el caso de Kellin, se observa que confunde el valor relativo de un número con el valor posicional, ya que ella le atribuye a los dígitos el valor absoluto de la cantidad que representaba independientemente de su posición.

el número porque es mayor que el uno

Figura 12

Cuadro No13

Resultados del problema 9.b

<i>Mayor valor posicional</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Entre el 7 de la 1ra y el 7 de la 2da cantidad	3	15	7	25

Observemos el cuadro anterior, hay un 60% de los niños que respondió incorrectamente a la interrogante planteada. Esto nos indica que no son capaces de concebir, que el número representado por el dígito de las decenas equivale con agrupaciones uniformes (múltiplos de diez) de las unidades representadas por el otro dígito.

El 15% de los niños respondió de forma no satisfactoria. Y el 25% no respondió a la interrogante.

Uno de los criterio identificado fue el de juzgar a los numerales por el valor absoluto que representan los dígitos que los conforman. Los niños que utilizaban este criterio consideraban que “94,715” representaba una cantidad mayor que “39,728” porque “9”, es más que “3”.

Podemos observar que Marjory confunde el valor relativo de un número con el valor posicional.

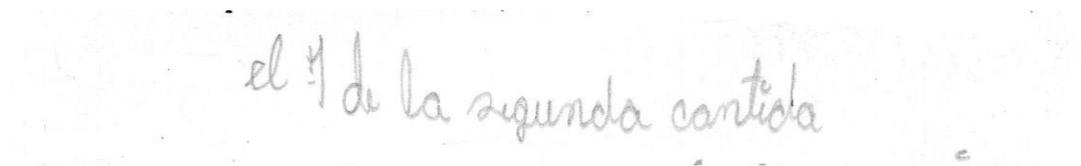


Figura 13

Cuadro No14

Resultados del problema 9.c

<i>Menor valor posicional</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Entre el 8 de la 1ra y el 5 de la 2da cantidad	0	18	7	25

Se observa que en el cuadro No13, ningún niño contestó como se esperaba a la pregunta anterior. Queda una vez más en evidencia que los niños están lejos del concepto del valor posicional de un número. Al respecto afirma Lampert (1989, p. 229), “Para la mayoría de los niños, un número es una alineación de dígitos. Palabras como centenas, decenas y unidades, no se toman en absoluto en consideración, o son asociadas con una fragmentación, un orden de escritura. Esto lleva a concluir que pocos niños dan una interpretación verdadera a la posición de los dígitos en términos de agrupación”.

El 72% dio respuesta a la interrogante de manera no satisfactoria. Y el 28% no contestó la pregunta planteada.

Observemos el caso de Jamsely, ella le adjudica el mayor valor posicional al dígito del número mayor. No toma en cuenta la posición de los dígitos. Dicha aseveración se hace ya que se le interrogo de manera personal, acerca de por qué el nueve de la segunda cantidad tiene mayor valor posicional, el cual afirmo que el de la segunda ya que 94,715 es mayor que 1,354

Cuadro No15

Resultados del problema 9.d

<i>Mayor valor posicional</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Entre el 9 de la 1ra y el 9 de la 2da cantidad	9	10	6	25

El 36% de los niños contestó de forma satisfactoria a la interrogante planteada. El 40% contestó no satisfactoriamente. Y el 24% no dio respuesta a la pregunta.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la tabla 13, los niños juzgaban a los números por la cantidad de dígitos que los conformaban, lo cual, aplicado al problema de la tabla anterior, donde tenemos las cantidades 39,728 y 94,715, los niños juzgaban hacia el numeral “94,715” como si fuera el mayor que “39,728” por haber estado formado por el número nueve, ellos lo visualizaban como el que esta primero es el que manda, si la diferencia entre los valores absolutos era poca y el número le era más o menos familiar, aplicaría el criterio de la mayor cantidad de dígitos, pero si sucedía lo contrario, entonces podría aplicar el criterio anterior. Kimberly contesto lo siguiente:

R= el segundo es el mayor que el menor.

Figura 14

Problema 10

Si tenemos 3,457 pelotas de diferentes colores



Escriba en forma desarrollada el número de pelotas

Hay ____ millares.

Hay ____ centenas

Hay ____ decenas

Hay ____ unidades

Cuadro No16

Resultados del problema 10

Desarrollo de millares, centenas, decenas y unidades	Respuestas			
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	<i>Total</i>
Entre el 9 de la 1ra y el 9 de la 2da cantidad	9	10	6	25

Una vez más queda evidenciado que los niños no han desarrollado la zona de construcción: Que se da cuando los niños saben que el dígito de la izquierda en el numeral representa conjuntos de diez objetos y el de la derecha los sobrantes. El 4% no dio ninguna respuesta, no tenían ni la menor idea de lo que es la notación desarrollada de un número. El 96% de los niños no contestó respuesta acertada. Confundieron el valor absoluto de un número con la forma desarrollada.

Hay 3 millares.
 Hay 4 centenas
 Hay 5 decenas
 Hay 7 unidades

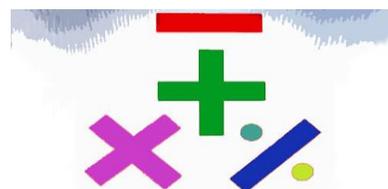
Figura 15

Esto nos muestra que al parecer no conocen la Propiedad aditiva la cual nos indica que; la cantidad representada por todo el numeral es la suma de los valores representados por cada uno de los dígitos que lo componen.

Así pues, para conocer la magnitud que representa un numeral como el 1997, debemos saber que el valor de cada símbolo estará determinado no sólo por su valor absoluto, sino también por el lugar que ocupa; que ese valor se determina en potencias de diez de izquierda a derecha (10 a la 0 para el primer lugar, 10 a la 1 para el segundo lugar, 10 a la 2 para el tercer lugar, etc.), que habrá que multiplicar el valor aparente de cada dígito por su valor de posición y que habrá que sumar el resultado de todos los valores relativos. O sea, para el numeral que nos ocupa: $(7 \times 10) + (9 \times 10) + (9 \times 10) + (1 \times 10)$ y el resultado será “1997”. Por supuesto que no se hace este tipo de cálculos cada vez que se opera con una cifra; se está acostumbrado a concebir las magnitudes bajo este sistema de numeración y por eso no es necesario. Sin embargo, al operar con el sistema se está operando bajo esta racionalidad, y es probable que para poder operarlo cabalmente se tenga que dominarla.

Problema 11

Sume: $1,239+756+5,721+2$



Cuadro No17

Resultados del problema 11

<i>Operaciones</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Suma de varios dígitos	5	17	3	25

El 68% de los niños resolvió el problema anterior de forma no satisfactoria. En el caso de Jaime Adrián, conocía el concepto de valor posicional, pero no había desarrollado la habilidad de conteo.

The image shows handwritten mathematical work. On the left, there is a column addition problem with three numbers: 1239, 2756, and 5721. The numbers are aligned by their rightmost digits. Above the first two digits of each number are small vertical tick marks. A horizontal line is drawn under the numbers, and the sum 7,717 is written below it. To the right of the addition, the text "hay 7,717" is written in a cursive hand.

Figura 16

En los libros de texto de Honduras, se continúa el trabajo introduciendo la suma de doble columna, primero con cálculos que no implican reagrupación de decenas y unidades, y posteriormente con otros que sí. Al respecto afirma, Fuson (1990) Que al proceder de esta forma, en los libros de texto tradicionales se asume que la comprensión de los conceptos de “decena” y “unidad” son prerequisites para la operación de la suma de doble columna, y no que son conocimientos que se complementan y enriquecen mutuamente.

Solamente el 20% resolvió el problema correctamente, utilizaron el método de la suma de doble columna. El 12% de los niños no tenían la menor idea de cómo resolver el problema, ni siquiera lo intentaron.

Problema 12

El lunes Jorge contó 33 pétalos. El martes 30 más. ¿Cuántos contó en total?

Cuadro No18
Resultados del problema 12

<i>Conteo y agrupación</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Cantidad de pétalos	12	10	3	25

El 45% de los niños resolvió el problema anterior. Podemos observar que hay un porcentaje mayor de niños que resolvieron el problema con respecto a los del problema 11. Esto nos muestra que presentan mayores dificultades al operar con millares, centenas, decenas y unidades. El 12% no intentaron resolver el problema.

El 40% dio respuesta a la interrogante de forma no satisfactoria.

No se observó alguna estrategia creada por el alumno, por lo que parten de una regla escolarmente instruida y no se basaron en los valores relativos de los dígitos, esto nos garantiza que quienes no recurrían a ella, no eran capaces de operar contando iterada mente decenas y unidades por separado.

Podemos observemos que Dayana utilizo como estrategia la suma de doble columna.

Handwritten work showing two addition problems:

$$\begin{array}{r} 33 \\ 30 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} R\ 63 \\ R\ 0\ 33 + 30 \\ \hline R\ 0\ 93 \end{array}$$

Figura 17

Problema 13

A Jorge le dio curiosidad cuando escuchó a la señora del abrigo rosa decir que tenía 64 caramelos pero que necesitaba tener 87. ¿Cuántos caramelos le faltaban a la señora?

¿Cuántas decenas le faltaban a la señora?

Cuadro No19

Resultados del problema 13

<i>Cantidades</i>	<i>Respuestas</i>			<i>Total</i>
	<i>Correcto</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No contestaron</i>	
Cantidad de caramelos	7	3	2	25
Decenas de caramelos	13	6	6	25
Unidades de caramelos	5	16	17	25

El 28% de los niños resolvió el problema de forma satisfactoria, pero el 24% no sabía expresar la cantidad de decenas y la cantidad de unidades.

Un alto porcentaje no dio respuesta a la cantidad de decenas y unidades del problema anterior.

En el caso de Jonathan, supo identificar la operación a realizar en el problema y conoce el la propiedad posicional, pero no conoce el concepto del valor posicional ya que no supo dar respuesta a la cantidad de decenas y unidades que representaba dicha cantidad.

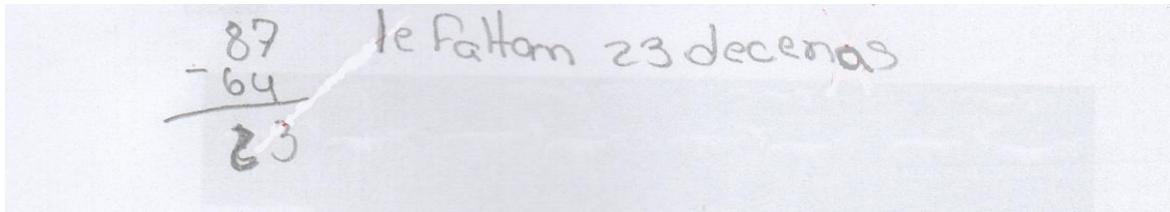


Figura 18

Un 52% no resolvió el problema. No sabía identificar la operación que debía realizar. Algunos resolvieron el problema como una adición. Observemos el caso de Kimberly, no identifico correctamente el tipo de operación que debía realizar y lo opero como una suma, y a la cantidad de decenas y unidades respondió sin ninguna semejanza a la respuesta correcta.

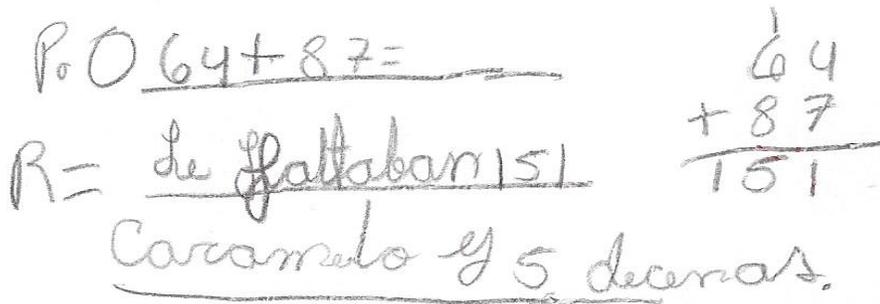


Figura 19

A la enseñanza tradicional se le han señalado múltiples deficiencias, al parecer concibe erróneamente la complejidad del concepto de valor posicional al considerar que su adquisición consiste en la posibilidad de representarse cantidades agrupadas en colecciones uniformes y elementos sueltos (eg. centenas, decenas y unidades), y pasa por alto el largo proceso en el que la niña o niño debe construir “estructuras conceptuales multiunitarias” (Fuson, 1990). Estas estructuras son necesarias para comprender el valor posicional. Haberlas adquirido implica ser capaz de conceptualizar y operar simultáneamente con distintos tipos de unidades

4.2 Secuencia de actividades problemáticas

4.2.1 Numeral completo:

Actividad No.1

Objetivo: Esta actividad tiene el propósito de afianzar la etapa del numeral completo, la habilidad de conteo, cuantificando la cantidad de dígitos en un número.

En vista de lo anterior se consideró pertinente presentar la siguiente actividad, la cual nos sirvió de base para la formulación de dos interrogantes:

Actividad #1

La siguiente actividad tiene como propósito afianzar la habilidad de conteo, a través de la utilización de material concreto ya que este representa un ente activo y estimulante en el proceso de aprendizaje en el desarrollo del concepto de valor posicional en la escritura de números.

En vista de lo anterior se consideró pertinente presentar el siguiente problema:

Problema #1

En esta actividad se les distribuyó varios palitos de fósforos en material concreto y se les preguntó acerca de la cantidad de fósforos que habían. Además si podían decir rápidamente cuántos palitos habían ahí. Posteriormente se les pidió que hicieran lo necesario, a fin de que cuando otro niño lo viera, pudiera decir rápidamente cuántos palitos habían. Para conocer con más detalle el nivel de conceptualización de los niños, se les pidió que explicaran siempre sus respuestas, además se les confrontó con lo que otros habían hecho. Esta actividad se realizó en grupos compuesto por cuatro integrantes.



Observemos el caso del grupo compuesto por Joseph, Daniel, Jaselli y Cecilio. Ellos contaron muy bien a la cantidad de palitos de fósforos y además hicieron dos grupos de a diez y tres sueltos, esto pues facilitaba el conteo de ellos mismos y de cualquier otro niño que quisiera decir rápidamente la cantidad de palitos de fósforos que habían ahí. Los niños reconocían la pertinencia de reagrupar y sabían que la escritura era un código directamente relacionado con eso. Fueron capaces de deducir, inmediatamente, la cantidad de palitos de las agrupaciones realizadas.

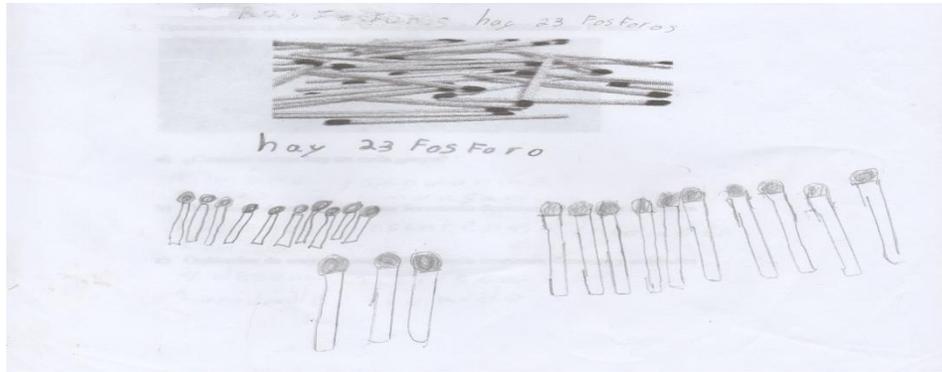


Figura 1

Para el caso de Jack, Lorena, Margori y Kellin, se les proporcionó 25 palitos de fósforos en material concreto, como estrategia hicieron dos agrupaciones de diez en diez y cinco sobrantes. Podemos observar que contaron correctamente la cantidad de palitos, pero a la hora de hacer la representación de las agrupaciones, al parecer olvidaron dibujar los tres restantes.

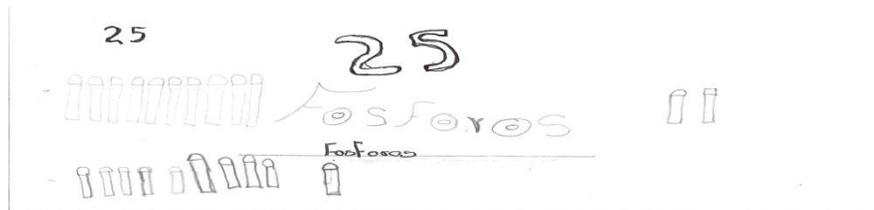


Figura 2

Una de las estrategias utilizadas por los niños fue la de realizar agrupaciones de diez en diez o de cinco en cinco de acuerdo a la cantidad de palitos de fósforos que se les presentó.

Uno de los errores cometidos fue el de no darle ningún valor a los objetos sobrantes, ya que para ellos solamente el numeral completo representaba la cantidad.

Problema #2

1. Dada la siguiente colección de números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8 y 9.

a) ¿Cuántos dígitos hay?

El propósito de esta actividad era que los niños contaran la cantidad de dígitos que había en la colección presentada de uno en uno, o que utilizaran la estrategia de conteo agrupándolos de cinco en cinco, afirmando que hay diez dígitos en la colección presentada de números. Observemos el caso de Yariela, que conto nueve dígitos.



Figura 9

Estos niños utilizaron la estrategia de conteo de uno en uno. Se observa que contaron correctamente los dígitos. Uno de los errores que cometieron los niños fue el de no ver el cero como la ausencia de cantidad, si no como algo que no tiene valor, ya que no lo tomaron en cuenta al contar la cantidad de dígitos. Y una de las habilidades adquiridas fue la de estrategia de conteo.

b) ¿Cuántos números podemos formar con todos los dígitos anteriores?

El propósito de esta actividad era que los niños formaran todos los posibles números con los dígitos antes presentados, y de esta forma observar el manejo de los niños en la etapa del numeral completo.

Todos los niños, excepto uno, escribieron los posibles números que se podían formar con los dígitos antes dados. Algunos escribieron hasta 20 números, afirmando que habían mucho más y otros representaron solamente cinco. Observemos el caso de Kevin, el dio respuesta a la pregunta escribiendo algunos de los números que se podían nombrar, y afirmando todos los del mundo, se le interrogó acerca de esta frase y lo que quiso decir en el lenguaje matemático es que habían infinitos números que se podían formar.

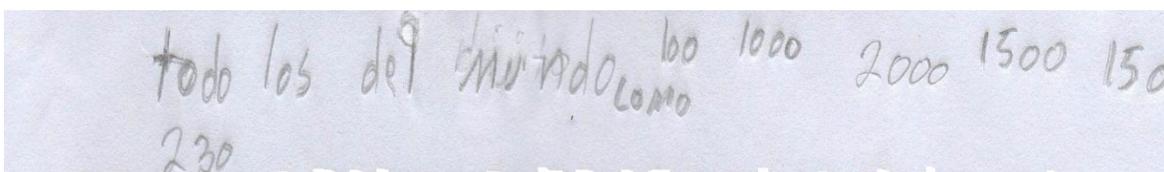


Figura 10

En el caso de Estephany afirmó, que solo se pueden formar 5 dígitos y no los nombró. Esto nos muestra que tiene dificultades aun en la composición y descomposición de números. Podemos concluir que los niños utilizaron estrategias como la de agrupación de cantidades ya sea de dos, tres, cuatro o más dígitos para formar los numerales.

Problema #3

Pedro tiene en su jardín 2 decenas y 3 unidades de flores, cada mañana las riega y por la tarde va a la escuela



a) ¿Cuántas flores tiene Pedro?

El propósito de esta actividad era que el niño desarrollara la habilidad de la estrategia de conteo y afianzara la etapa del numeral completo. En este problema se esperaba que el niño utilizara estrategias de conteo, realizando agrupaciones de cinco en cinco o de diez en diez.

Para dar contestación a esta pregunta, se les proporciono a los niños 23 flores no ordenadas canónicamente en material concreto. Observemos lo que escribió Kellin Leticia.

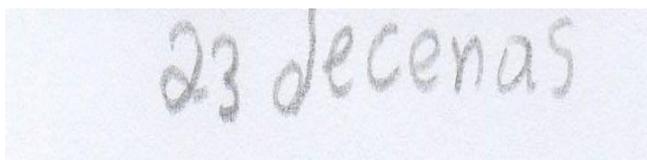
A photograph of a piece of paper with the handwritten text "23 decenas" in blue ink. The word "decenas" is written in a cursive style.

Figura 11

Observemos uno de los errores que cometieron, confundieron las unidades con las decenas, esto nos muestra que al parecer no tenían claro el concepto de decenas y unidades.

La mayor parte de los niños dio respuesta de forma satisfactoria a la interrogante que se le planteaba, dado que ya se les había presentado varias actividades de conteo, los niños iban mostrando un gran avance en el desarrollo de dicha habilidad.

A continuación se presenta lo que escribió uno de los niños:

A photograph of a piece of paper with the handwritten text "23 unidades" in blue ink. The word "unidades" is written in a cursive style.

Afirmó que había 23 unidades de flores lo cual es correcto, ya que la colección de flores se les presentó de forma desagrupada. Una de las habilidades adquiridas por los niños fue la estrategia de conteo.

b) ¿Cuántos dígitos tiene el número que representa la cantidad de flores?

El propósito de esta actividad era que el niño manejara correctamente la etapa del numeral completo. Para responder esta pregunta los niños tenían que contar la cantidad de dígitos que había en las 23 flores.

La mayoría de los niños contestó como se esperaba, dieron respuestas tales como, hay dos dígitos. Algunos de los niños presentan obstáculos en identificar los dígitos de un número, dada una cantidad. En el anterior caso los dígitos estaban separados por coma, esto facilitaba a los niños identificar la cantidad de dígitos planteados que había.

Observemos lo que escribió Jaime:

Handwritten text in black ink on a white background. The text reads "Tiene 2 dígitos". The word "Tiene" is written in a cursive-like script. The number "2" is written in a simple, bold style. The word "dígitos" is written in a cursive-like script.

Figura 12

Esto nos muestra que los niños han alcanzado el nivel del numeral completo, ya que según Ross (1990), para ellos los dígitos juntos eran los que representaban la cantidad, sin que le atribuyeran ningún significado a los dígitos por separado.

c) Indique la posición de cada dígito

Esta actividad tiene como propósito desarrollar el concepto del valor posicional. La mitad de los niños, afirmaron que la posición del primer dígito era de dos decenas y la del segundo dígito era de tres unidades. Estos niños dejan evidenciado que han ido superando las dificultades con el valor posicional de dos dígitos. Uno de los alumnos contestó que el dos estaba en la primera posición y el tres en la segunda, se observa que al parecer no conocía la propiedad posicional, ya que la primera posición corresponde a las unidades y la segunda a las decenas de dicha cantidad. Observemos el caso de Jaime, quien respondió como se esperaba:

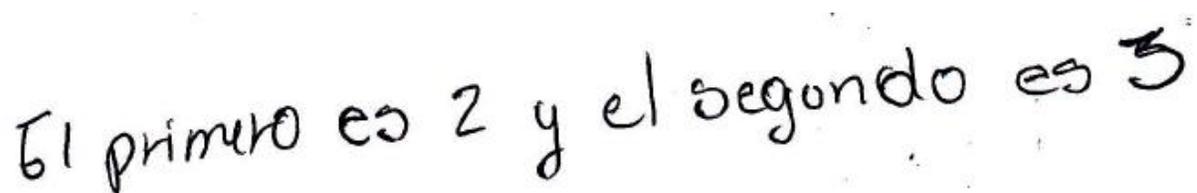
Handwritten text in black ink on a white background. The text reads: "El primero es 2 y el segundo es 3". The handwriting is somewhat cursive and informal.

Figura 13

Uno de los errores que cometieron los niños fue la de afirmar que la posición de las decenas correspondía al segundo lugar y el de las unidades al primer lugar.

4.2.2 Propiedad posicional

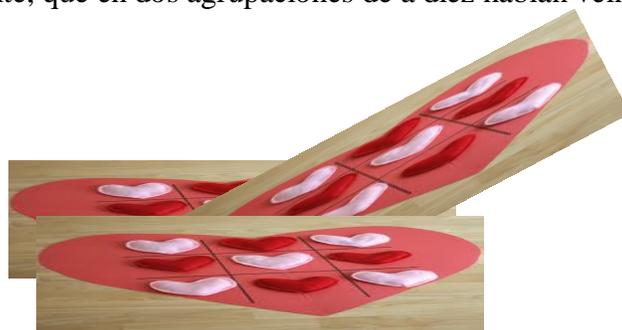
Actividad No2

Objetivo: El objetivo de esta actividad era desarrollar en el niño la propiedad posicional y la habilidad de agrupamiento de objetos.

Problema #1

En esta actividad se les presentó a los niños un grupo de diez corazones en material semi-concreto, luego se les pidió que a este grupo le sumaran diez más. Se les preguntó por la cantidad de corazones que había en el grupo y además por la cantidad de decenas y unidades.

Con este problema se pretendía que los estudiantes pudieran utilizar la estrategia del cálculo mental y saber que en una decena hay diez unidades. Ya teniendo dos agrupaciones de a diez podían decir rápidamente, que en dos agrupaciones de a diez habían veinte corazones.



Se observó la estrategia de conteo de cinco en cinco y de diez en diez. Sin embargo el grupo de los niños formado por Katherine, Dayana, Lizzi y Lizbeth, no dió respuesta a la primer pregunta, pero si sabían que en veinte unidades habían dos decenas, por lo tanto respondieron que había dos decenas y cero unidades de corazones de forma agrupada. Observemos la respuesta de uno de los equipos.

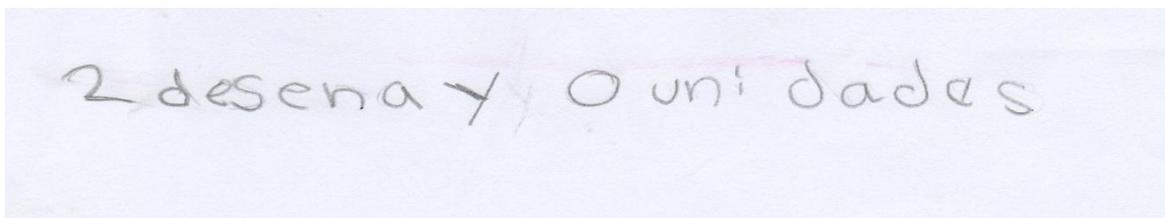


Figura 6

En cambio el grupo compuesto por Jack, Lorena, Kellin y Margori contestaron correctamente a la cantidad de corazones que habían en el grupo, pero no conocían el valor posicional de los números, ya que expresaron la cantidad en decenas y unidades de forma incorrecta. Uno de los errores cometidos era que le adjudicaban a las unidades un valor mayor que a las decenas.

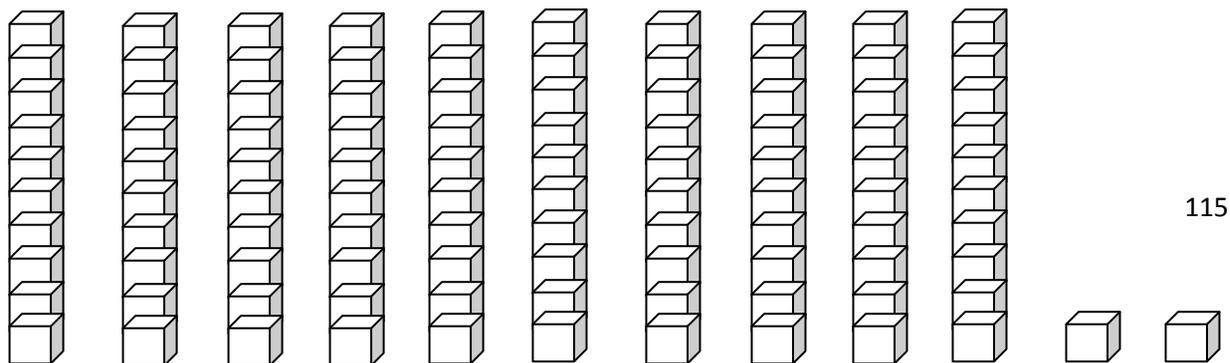
Hay 20 corazones
9 decenas y 11 unidades

Figura 7

Podemos concluir que los niños al parecer no conocen la Propiedad de “base diez”; donde los valores de la posición de un número se incrementan de derecha a izquierda en potencias de diez.

Problema #2

Esta actividad se realizó a través de material semi-concreto, donde se buscaba que los alumnos comprendieran que en una centena habían cien unidades, en una decena diez unidades. En el cual se le presentaba a los niños diez grupos de diez cubos cada uno. Se les pedía sumarle dos cubos a este grupo. Se les interrogó acerca del total de cubos, además por la cantidad de centenas, decenas y unidades.

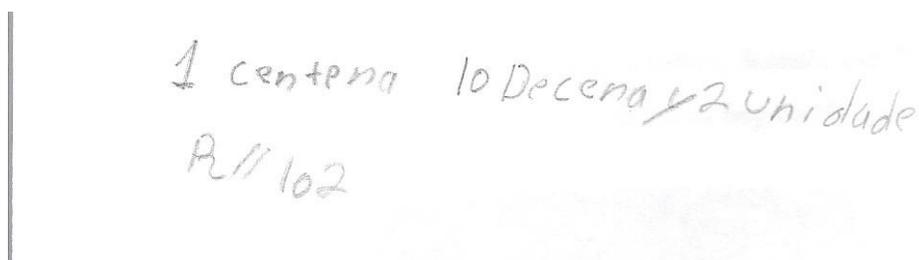


En este problema los niños debían saber que en una ristra de cubos había una decena, por lo tanto concluir que en diez ristras de cubos habían diez decenas, y que diez decenas representaba una centena. Entonces para saber el total tenemos una decena y dos unidades sueltas, por tanto habían 102 cubos.

La mitad de los niños contestaron correctamente a la pregunta sobre la cantidad de cubos que se tenían, dieron respuestas tales como, hay 102 cubos. Ningún niño contestó correctamente la cantidad de centenas, decenas y unidades que habían en los 102 cubos. No tenían claro la propiedad del valor posicional para cantidades grandes que involucraban centenas, decenas y unidades. Todos los niños pudieron decir la cantidad de unidades que se les presentaba, pero la cantidad de decenas y centenas las relacionaban con el número diez, osea con el valor absoluto del número.

Uno de los errores cometidos por los niños fue el de afirmar que los dígitos son más que una cantidad alineada, ya que no tomaron en cuenta la posición de las decenas, centenas y unidades.

Uno de los equipos contestó que habían una centena, diez decenas y dos unidades, sin embargo la cantidad de las decenas era cero para cantidades agrupadas que ese fue el caso.



1 centena 10 Decena y 2 unidades
R// 102

Figura 8

Otro de los errores cometidos fue el de afirmar que habían diez decenas en cantidades agrupadas, en ese caso con respecto al numeral 102.

Una de las habilidades adquiridas por los alumnos fue la de operar con centenas, decenas y unidades.

Actividad No3

El objetivo de esta actividad era desarrollar la habilidad de agrupación de objetos no ordenados canónicamente y el desarrollo de la propiedad posicional.

Problema #1

En esta actividad se utilizó material semi-concreto y se realizó individualmente. En el inciso 1), se les presentó una tarjeta con el numeral 21 y se les pidió colocar veintiún corazones sueltos, dos tiras de a diez y uno suelto, o una tira de diez y once sueltos. Les fue dado un grupo de corazones sueltos de acuerdo al número de la tarjeta. Además se les pidió que hicieran la representación en papel.

Con este problema se pretendía que los alumnos desarrollaran la habilidad de agrupación de objetos.

El desempeño de los niños estuvo muy bien, no se presentó dificultad alguna en la agrupación de los corazones, y lograron agrupar veintiún corazones sueltos y dos tiras de a diez y un corazón suelto. Observemos la solución que presentó Kevin:

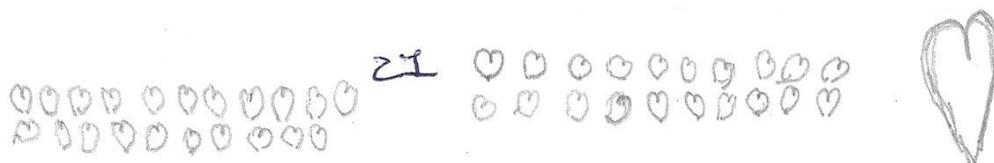


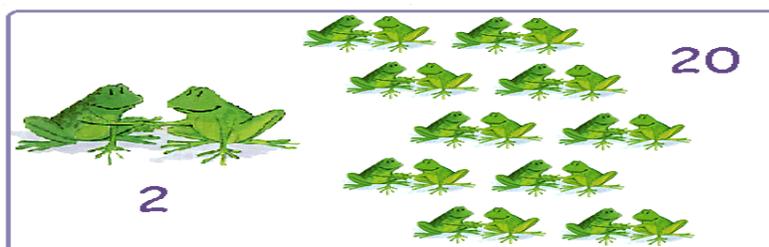
Figura 14

Todos los niños lograron hacer correctamente al menos una representación de las agrupaciones en papel, y logran establecer la correspondencia de elementos a números. Ya esto nos muestra que el niño ha ido superando dificultades con respecto a la agrupación de objetos ordenados no canónicamente.

Problema #2

El propósito de esta actividad buscaba que los estudiantes comprendieran que en un numeral de dos dígitos el de la izquierda correspondía a las decenas y el de la derecha a las unidades.

Se les presentó dos grupos de ranas, uno de dos y el otro de veinte. Se les preguntó en cuál cantidad vale más el dos y que justificaran su respuesta.



En general el desempeño de los niños fue muy acertado, ya que respondieron que el dos del veinte vale más, ya que en esa cantidad el dos representa dos decenas, que equivale a 20 unidades y en la otra cantidad solo hay dos unidades. Algunos niños respondieron que el dos del veinte, pero no justificaron su respuesta. De igual forma era una respuesta correcta. Para tener una mejor idea de lo que hicieron, observemos lo que contestó Kevin.

R/ 20 es mas que 20 vale más
R/ Porque contiene más que 20 20 = 2 decenas
2 = 2 unidades.

Figura 15

Hubo un caso donde el niño respondió que tenía mayor valor el dos del veinte, que el dos que representaba la otra cantidad, ya que el veinte es mayor que dos. Se podría afirmar que uno de los errores cometidos es que aún confunde el valor absoluto de un número con el valor posicional, ya que juzga los números por la cantidad de dígitos que los conforman, lo cual, aplicado al mismo ejemplo, hacía que el numeral “20” fuera mayor que “2” por haber estado formado por dos dígitos y no por uno.

Al respecto se refiere Ross (1990), que el proceso de adquisición del valor posicional en los niños, podía ser estudiado desde diferentes perspectivas. Sin embargo, un conocimiento que ella consideró fundamental en la adquisición del concepto, y en el cual centró su investigación, fue el de saber que: “En un numeral de dos dígitos, el numeral completo representa una cantidad completa de objetos, mientras que los dígitos individuales representan una partición de la colección total en una parte de decenas y otra de unidades” (Ross, 1990, p. 1).

4.2.3 Valor Posicional

Actividad No4

Objetivo: El objetivo de esta actividad es lograr una comprensión por parte de los alumnos de la habilidad de relación de orden y la vez de la propiedad posicional

Problema #1

Se realizo a través de material concreto, proporcionándoles a los niños para la primera parte de la actividad dos fichas de color rojo, las cuales representaban decenas y 5 fichas de color azul representando la cantidad de unidades.

Esta actividad tenía como fin afianzar la propiedad posicional en el alumno, en el inciso a) se les preguntó acerca de las unidades que representaban las fichas azules y la cantidad de unidades que representan las fichas de color rojo. Ellos debían contestar que habían cinco unidades y dos decenas.

1. Las fichas de color azul representan las unidades y las fichas de color rojo representan las decenas.



- a) ¿Cuántas decenas representan las fichas rojas y cuántas unidades representan las fichas azules?

Todos los niños respondieron exitosamente a esta pregunta, manifestando que habían dos decenas de fichas rojas y cinco unidades de las fichas azules.

Esto nos muestra que los niños han alcanzado un buen desarrollo en el concepto del valor posicional. Para tener una mejor idea, observemos lo que escribió Jaime:

El azul representan 5 decenas. Porque hay 5 fichas de color rojo
El rojo representan dos unidades. Porque solo hay 2 fichas de color azul

Figura 20

Una de las habilidades adquiridas por los alumnos fue la de establecer correspondencia entre el número de objetos y palabra-número.

b) Qué número representan las fichas rojas y azules?

Todos los niños respondieron de forma acertada, al manifestar que habían veinte y cinco fichas en total, ya que dos decenas correspondía al dos y las cinco unidades al número cinco. Hubo un niño que utilizó la siguiente estrategia, dijo que dos decenas eran veinte unidades, entonces sumó las veinte unidades con las cinco unidades que representaban las fichas rojas, por tanto concluyó que el número formado por las fichas era el veinte y cinco.

Observemos lo que escribió Kevin:



Handwritten text: 25 20 decenas y 5 unidades

Figura 21

Problema #2

En esta actividad, se les proporcionó a los niños una colección de 12 objetos no ordenados canónicamente en material semi-concreto y se les preguntó por el número que representa dicha cantidad y que si los ordenamos de mayor a menor, cuantos objetos habían.

El propósito de este problema era afianzar en el alumno el concepto de relación de orden.

En este problema el desempeño de los niños fué muy bueno, ya que afirmaron que habían 12 objetos y que no importaba el orden en el que estaban, siempre la cantidad era la misma.

Podemos observar el caso de Jaime:

b122/ el mismo número, el doce, porque los doce objetos estaban desordenados, pero al ordenarlos no cambia el número de los objetos.

Figura 16

Por otra parte hubieron dos niños que respondieron correctamente a la primer pregunta, pero a la segunda interrogante no la supieron contestar, ya que respondieron que habían veintiún objetos.

Uno de los errores cometidos fue que le dieron otra interpretación a la pregunta, y lo que hicieron fue intercambiar la posición de los dígitos. Poco a poco se evidencia que los niños van adquiriendo las habilidades que involucra el desarrollo del valor posicional, específicamente en esta actividad, la habilidad de agrupación de objetos.

Ya que según Bednarz y Janvier (1982, 1988) definieron al número como la representación ordenada de una cantidad y consideraron que los diferentes dígitos de un numeral representaban ordenamientos que equivalían a posibles agrupamientos en una colección de objetos.

Problema #3

La siguiente actividad se realizó en grupos de cuatro integrantes, a cada grupo se les entregó varias cartas con numerales del 0-9 en material semi-concreto. La actividad consistía en que

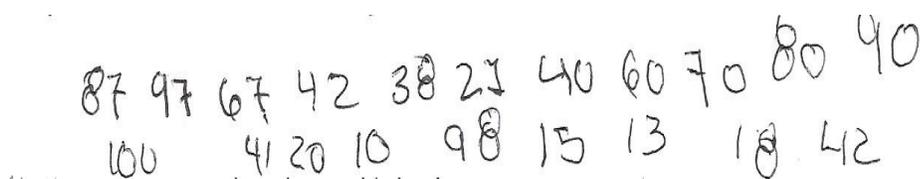
un integrante del grupo nombraba dos números en voz alta. Lo que se les preguntaba era lo siguiente:

a) ¿Qué números se forman con sus paletas?

El propósito de este numeral era que los niños comprendieron que con los dígitos del cero al nueve se podían formar infinitos números. Podían formar número de dos, tres, cuatro dígitos, etc. Pero lo curioso es que nadie formó de tres dígitos o más, posiblemente porque se les facilita a los niños trabajar con números que tengan menos cantidad de dígitos.

Esta actividad se realizó de forma exitosa, ya que se había realizado una anteriormente, pero con diferente fin, ya que posteriormente en esta actividad se les pide que formen los números de mayor y de menor valor. Algunos grupos repitieron la actividad varias veces. Y otros grupos nombraron más números que otros. Empezaron a escribir los números que el niño iba mencionando.

Uno de los grupos escribió lo siguiente.



A photograph of a student's handwritten work. The numbers are arranged in two rows. The first row contains: 87, 97, 67, 42, 38, 21, 40, 60, 70, 80, 90. The second row contains: 100, 420, 10, 98, 15, 13, 18, 42. The handwriting is in black ink on a white background.

Figura 22

El propósito del numeral b) y c) era que los niños comprendieran la habilidad de relación de orden y la propiedad posicional. Se les pedía que formaran con sus paletas las cantidades de mayor y menor valor, además que especificaran el valor posicional de los dígitos.

Aquí tenían que ordenar los números de mayor a menor y viceversa. Por ejemplo Lisbeth formó el número 999 y especificó que era el mayor y también formó el número 30 indicando que era el menor. Con respecto a la pregunta del inciso c), se le interrogó acerca del valor posicional del 30, ella contestó que tenía 3 decenas y 0 unidades.

A continuación se muestra lo que escribió:

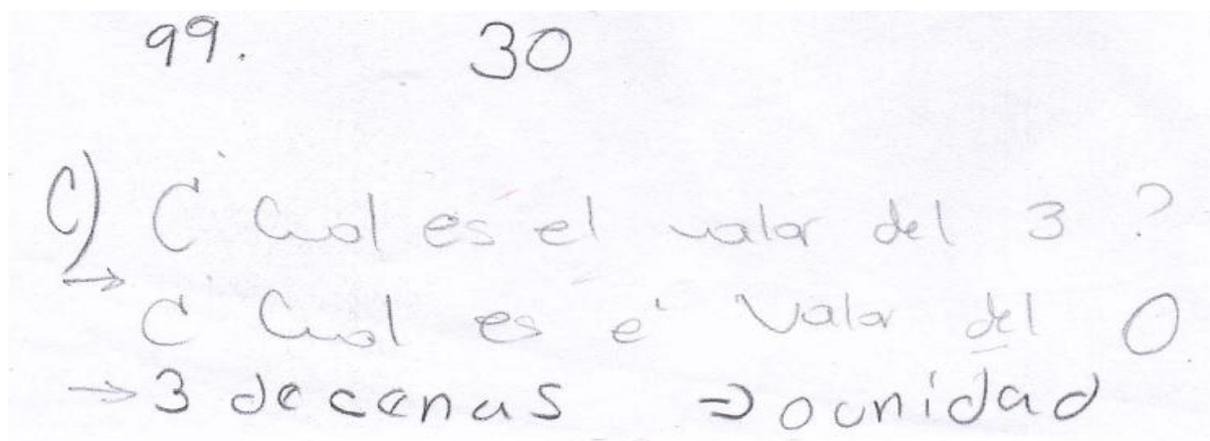


Figura 23

Una de las habilidades adquiridas fue la de ordenar números de mayor a menor y de menor a mayor. Además sabían identificar qué cantidades eran mayores y menores.

Como menciona, (Fuson, 1990). Las “estructuras conceptuales multiunitarias” son necesarias para comprender el valor posicional. Haberlas adquirido implica ser capaz de conceptualizar y operar simultáneamente con distintos tipos de unidades (Conceptualizar al número trescientos simultáneamente como tres unidades que agrupan centenas, treinta unidades que agrupan decenas y trescientas unidades sueltas), concibiendo en todo momento sus equivalencias y siendo capaz de transformarlas de unas a otras.

Actividad No5

Esta actividad tiene como propósito fortalecer la habilidad de relacionar números y la propiedad posicional. Aquí ya se les presentaron problemas con mayor grado de dificultad,

Problema #1

Juan tiene 5 unidades de láminas de Pokémon y Pedro tiene 2 decenas. ¿Quién tiene más? ¿Por qué?

En esta actividad tenían que conocer que en una decena hay diez unidades, así en las dos decenas de laminas de Pedro podrían concluir que hay veinte unidades, luego relacionar las cantidades de cual es mayor, si las cinco unidades de laminas de Pokémon o las veinte unidades de laminas de Pedro.

Manifestaron que Pedro tiene más laminas que Juan, ya que en dos decenas hay 20 unidades. Se observa que establecieron una comparación entre las dos cantidades al afirmar que Pedro tiene 20 láminas de Pokémon y Juan solamente cinco.

Kevin no expresó si Juan o Pedro tenían mayor cantidad de láminas de Pokémon, pero realizó el siguiente análisis, indicándonos que Pedro tiene 20 unidades y Juan cinco.

Handwritten student work showing a comparison of units and a subtraction problem. The text reads: "Pedro tiene 20 unidades y Juan 5 - 20 / 5 = 15". Below this, it says "1 unidad = 5".

Figura 37

Se observa que resto las dos cantidades, se le interrogó acerca de ello manifestando que era para establecer la diferencia que hay entre las laminas de cada uno de ellos.

Mauricio contestó correctamente a la pregunta anterior de la siguiente manera:

Handwritten text in cursive: "pedro porque 2 decenas son 20 unidades".

Figura 38

Uno de los errores más comunes que cometieron los niños, fue el de confundir el valor absoluto de un número con el valor posicional, al manifestar que Juan tenía más tarjetas ya que 5 es más que dos.

Handwritten text in cursive: "juan porque el 5 es un número más alto que el 2."

Figura 39

Problema #2

El problema que se les planteaba era, el perro de Raúl come 1 decena y 3 unidades de huesos, mientras que el de Jorge come 3 decenas y 1 unidad. ¿Cuál de los perros come más? ¿Por qué?

En general, la mayoría de los niños contestaron muy bien a la pregunta planteada, al manifestar que el perro de Jorge come más que el Perro de Raúl. Se observa que uno de los niños, comparó la cantidad de decenas y unidades de hueso que comía el perro de Raúl a la cantidad que comía el Perro de Jorge.

Observemos la respuesta de Jaime:

El perro Jorge comió 10 huesos
y Raúl comió 3

Figura 41

En otro de los niños, se observó la estrategia de sumar la cantidad de unidades que habían en una decena, con las 3 unidades, manifestando que habían 13 unidades de huesos en total, para el Perro de Raúl y con la cantidad de huesos del perro de Jorge hizo lo mismo.

La respuesta dada por Lorena, evidencia claramente que al parecer no sabe diferenciar entre decenas y unidades de una determinada cantidad, uno de los errores cometidos es que ella sumó el valor absoluto de las cantidades, y por ende manifestó que eran iguales.

Comen igual porque 1 decena + 3 unidades
es igual a 4 del de Jorge

Figura 40

Problema #3

En un partido de básquetbol jugado en la cancha del colegio, los jugadores de los equipos Segundo A y Segundo B marcaron la siguiente cantidad de goles:

Equipo Segundo A

Equipo Segundo B

Rodrigo, 1 decena y 4 unidades

Fabián, 3 decenas

Marcos, 2 decenas

Luis, 1 decena y 7 unidades

Pedro, 5 unidades

Daniel, 2 unidades

Álvaro, 1 decena

En este numeral se les preguntó a los niños, ¿Quién fue el goleador del partido?, ¿Cuántos goles convirtió?

Casi todos los niños respondieron de forma acertada al problema, al manifestar que el goleador del partido había sido Fabián con treinta goles, y el resultado final entre los dos equipos era: El equipo A había convertido 40 goles y el equipo B 49 goles.

Se puede apreciar en la solución que presentó una alumna:

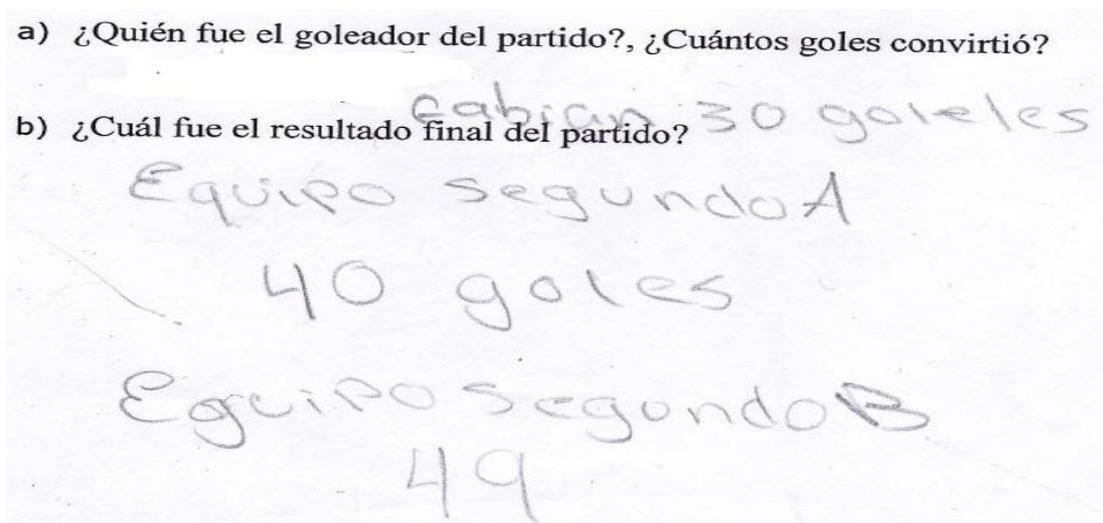


Figura 41

Uno de los errores de los alumnos, como es el caso de Lorena fue que confundió el valor absoluto de un número con el valor posicional, ya que al interrogarla sobre el goleador del partido, ella respondió que había sido Luis, ya que el metió 1 decena y 7 unidades de goles.

Las 7 unidades las tomó como la cantidad mayor. Con respecto al inciso b), lo contestó correctamente al manifestar que el equipo B había sido el ganador del partido.

Observemos lo que realizó:

- a)
luis
metio 17 goles
- b)
que gano el equipo B

Figura 42

Una de las habilidades que lograron los alumnos fue la de operar con decenas y unidades en diferentes situaciones.

Actividad No6

Problema #1

El propósito de esta actividad es afianzar la Propiedad posicional y la de valor aparente. Se consideraron pertinentes las siguientes actividades.

El propósito de esta actividad era que el alumno comprendiera la propiedad multiplicativa, ya que tenían que relacionar cada cantidad con el valor desarrollado. Por ejemplo en el número 4770 el cuatro que es el valor relativo se multiplica por 1000 que es la posición del dígito y esto nos da 4000, luego el siete se multiplica por 100 que es el valor de la posición y esto nos da 700, seguido del 7 que se multiplicaría por 10 y por último el cero que se multiplica por 10, y luego la suma de todos estos valores nos da 4770. Lo mismo se hace con los demás dígitos, esta sería una estrategia para resolver el problema.

Una con la línea el número y su forma desarrollada.

a) 4770	$4000+700+7$
b) 4070	$4000+700+70$
c) 7707	$4000+700+70+7$
d) 4707	$7000+70+7$
e) 4777	$4000+70$
f) 7077	$7000+700+7$

La mayor parte de los niños, establecieron relación entre la cantidad presentada y el valor desarrollado de cada cantidad correctamente.

Para tener una mejor idea, observemos lo que respondió Esteban:

a) 4770	$4000+700+7$
b) 4070	$4000+700+70$
c) 7707	$4000+700+70+7$
d) 4707	$7000+70+7$
e) 4777	$4000+70$
f) 7077	$7000+700+7$

Figura 65

El resto de los niños establecieron algunas relaciones acertadas, entre la cantidad y la forma desarrollada correspondiente. Al parecer presentan todavía dificultades con la propiedad de “base diez”.

2. Escriba los siguientes números en forma desarrollada

- a) 3500

- b) 3050
- c) 3005

Con este problema, se pretende que los niños vayan superando las dificultades presentadas con la propiedad de base diez.

En esta actividad 12/14 niños, respondieron muy bien a lo que se les pedía, justificando que el número 3500, correspondía a 3000 más 500, el 3050, correspondía a 3000 más 50 y por último el 3005, que correspondía a 3000 más 5, como estrategia utilizaron la suma de doble columna para sumar las cantidades correspondientes a cada número.

Uno de los niños escribió que en el número 3500, la primer posición era la de las unidades de millar, por tanto al tres se le agregaban tres ceros, y la segunda posición era la de las centenas, y que por tanto se le tenía que agregar al cinco dos ceros.

Observemos las respuestas de parte de Kevin:

- a) 3500
- b) 3050
- c) 3005

Handwritten mathematical justifications for the numbers 3500, 3050, and 3005. The first line shows $3000 + 500$, the second line shows $3000 + 50$, and the third line shows $3000 + 5$.

Figura 66

3. Escriba el valor que tiene el dígito 7, en cada número de los abajo representados:

- a) 5678
- a) 7024
- b) 1702
- c) 4007

Once de catorce niños respondieron exitosamente a la interrogante planteada, afirmando que el valor del número siete en la cantidad de 5678, es de siete decenas, en la cantidad de 7024 el valor posicional del siete, es de 7 unidades de millar, en 1702, el valor del siete es de 700, y en el 4007, el valor posicional es de 7 unidades.

La respuesta de Lorena fué la siguiente:

Figura 67

a) $5678 = 70 \text{ digito}$

b) $7024 = 7000$

c) $1702 = 700$

d) $4007 = 7$

Uno de los errores que cometieron los alumnos fue la de confundir el valor absoluto de un número con el valor posicional.

Como afirma Ross (1989^a) Hay cuatro propiedades básicas que constituyen al sistema de numeración:

Propiedad multiplicativa: El valor de un dígito se da multiplicando su valor aparente por el valor asignado a su posición.

Propiedad aditiva: La cantidad representada por todo el numeral es la suma de los valores representados por cada uno de los dígitos que lo componen.

Uno de los niños, solamente escribió la posición que ocupaba el siete en cada cantidad, afirmando que en la cantidad de 5678, el siete está en la posición de las decenas, en el 7024, estaba en la posición de las unidades de millar, en la cantidad de 1702, el siete estaba en la posición de las centenas y en la cantidad de 4007, se encuentra en la posición de las unidades.

Esto nos muestra que al parecer este niño, no ha afianzado la propiedad de base diez. Pero no mencionó el valor de la posición del siete en cada cantidad presentada.

Actividad No7

Esta actividad tiene el propósito de afianzar el concepto de valor aparente y desarrollar el concepto del valor posicional. Esta actividad se realizó de forma individual, para obtener información acerca de cada niño. Se consideró pertinente las siguientes actividades:

Problema #1

El propósito de esta actividad era que los alumnos comprendieran el valor relativo de un determinado dígito en un numeral, para esto se les presentó la siguiente actividad en la cual tenían que afirmar que el valor del 7 en el numeral 1, 742, 653 era de 700000, ya que tenían que multiplicar el siete por 100 000, ya que correspondía a 10 elevado a la cinco.

El valor posicional del 7 en el numeral 1, 742,653 es:

Solamente 12/14 niños dieron respuestas acertadas en el desarrollo de esta problema, al manifestar que el valor posicional del siete en el numeral 1, 742,653, era de 7 centenas de millar. Justificando que la posición del 7, eran las unidades de millar y que el valor posicional era de 7 unidades de millar.

Para tener una mejor idea, observemos lo que escribió un alumno:

El su valor es de 7CM. porque el número que
esta antes de la Unidad de Millon pertenece a
las centenas de millar.

Figura 68

Uno de los niños escribió el valor posicional del número siete, en notación desarrollada, al afirmar que el valor del siete en la cantidad 1, 742, 653, era de 700,000. Lo cual esta correcto.

Una de las dificultades encontradas, es que confundían el valor aparente del número siete con el valor posicional, ya que el valor aparente en dicha cantidad es de siete, pero en el valor posicional, si importa la posición del dígito.

Problema #2

Carla reunió L.32, 180 en una colecta del centro de alumnos. Indica el desarrollo que representa la cantidad de dinero reunida por Carla.

Todos los niños respondieron exitosamente a la pregunta planteada, al responder que habían tres decenas de millar, dos unidades de millar, una centena, 8 decenas y cero unidades, y luego lo expresaron la cantidad en notación desarrollada.

Jaime, respondió de la siguiente forma:

30,000 + 2,000 + 200 + 80 + 0

Figura 69

Problema #3

A qué número corresponde el desarrollo de $4\text{CM}+5\text{UM}+8\text{C}+3\text{U}$.

La mayoría de los niños respondieron exitosamente a la pregunta planteada, al responder que el número que se formaba era 405,803, afirmando que 4CM, corresponde a 400000, 5UM corresponde a 5000, 8C es equivalente a 800 y 3U al número 3.

Para tener una mejor idea, observemos lo que hizo un alumno:

Problema #3 405,803

4cm = 4,000,000
5um = 5,000
8c = 800
3u = 3

405,803

Figura 70

Una de las estrategias observadas en un niño, fué que expresó la forma desarrollada de cada cantidad y luego utilizó la suma de doble columna, para llegar a la conclusión que el número era 405, 803.

En esta actividad los alumnos no presentaron ningún problema, ya que se habían realizado actividades relacionadas con la propiedad posicional.

Actividad 8

Problema #1

Esta actividad tenía como fin que los niños comprendieran que en una centena habían cien unidades y diez decenas y en una decena diez unidades. El problema que se les presentó consistía en sumar $4C+5D+9U+300+400$. Los alumnos podían resolverlo utilizando la equivalencia de las centenas y decenas a unidades y posteriormente la suma de doble columna. Otra de las estrategias era sumando el total de las centenas, que eran 16C con las decenas y unidades.

Uno de los niños respondió que 4C, equivalía a 400 y 5D a 50, luego utilizo la suma de doble columna para llegar a la conclusión que habían 1, 159 como se muestra a continuación:

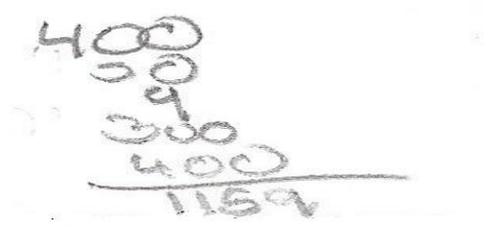

$$\begin{array}{r} 400 \\ 50 \\ 9 \\ 300 \\ 400 \\ \hline 1159 \end{array}$$

Figura 71

Otra estrategia que se observó por parte de un niño fue, que sumó las centenas con las centenas y posteriormente le sumó las decenas y unidades.

En el caso de Kellin, 4C las expresó como “4”, 5D como “5”, 9U las expresó como “9”, del 300 solamente tomo el “3” y del 400 el “4”. Luego utilizó como estrategia la suma de doble columna, esto nos muestra que al parecer tomo el cero como la ausencia de cantidad.

A handwritten vertical addition problem. The numbers 505 and 232 are written vertically, with 505 on top and 232 below it. A horizontal line is drawn between the two numbers. The sum, 737, is written to the right of the line, with the 7 in the ones place, 3 in the tens place, and 7 in the hundreds place.

Figura 72

Uno de los errores cometidos fue el de sumar los valores relativos de los números, esto nos muestra que expresó el valor absoluto de cada número y luego utilizó como estrategia la suma de doble columna para expresar el resultado.

Problema #2

El problema que se les presento era: “En otro puesto de la feria, Jorge podía ganar un premio si descubría cuál de los números que estaban entre el “60” y el “69 se hacía más grande si se invertían los dígitos. ¿Con qué número ganaría Jorge los premios?

Todos los niños los niños respondieron exitosamente a la pregunta planteada, al manifestar qué invirtiendo los dígitos del número 68, nos quedaba 86, por tanto con el número 86, Jorge ganaba el premio.

Uno de los niños utilizó la estrategia de ordenamiento en forma ascendente, de los números que estaban entre el 60 y 69, luego encerró el número mayor, indicando que con ese número Jorge ganaba el premio.

Para tener una mejor idea, observemos la respuesta de Lizzy:

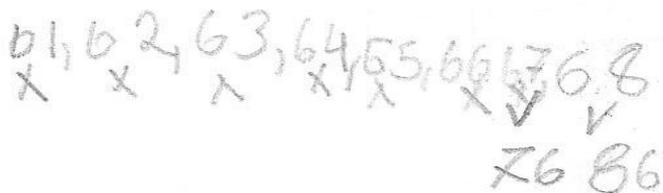


61 - 62 - 63 - 64 - 65 - 66 - 67 - (68)

Figura 73

Uno de los niños invirtió todos los dígitos, y escribió nuevamente el número 86 por aparte y se le pregunto porque lo aislaba de los demás, el respondió porque con este número gana Jorge el premio.

La respuesta de Jack, fue la siguiente:



61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68
X X X X X X X V V
76 86

Figura 74

4.2.4 Zona de construcción

Actividad No9

Objetivo: El objetivo de esta actividad era que los alumnos desarrollaran la zona de construcción, la cual consiste en saber que en un numeral de dos dígitos, el de izquierda representa conjunto de diez objetos y el de la derecha elementos sobrantes. Además se pretende afianzar la habilidad de relacionar números.

Problema #1

Esta actividad se realizó a través de material concreto, se les presentó una colección de lápices y tornillos. Se les pidió formar un grupo de 12 lápices y otro grupo de 21 tornillos. Y se les preguntó cual grupo representaba una mayor cantidad, además que especificaran el porqué.



Dado que ya manejaban la habilidad de conteo, utilizaron la estrategia de realizar grupos de cinco en cinco y de diez en diez para especificar cuantos lápices y tornillos habían. Concluyeron que habían más tornillos que lápices. Pero al momento de justificar la respuesta se basaron en el valor absoluto de la cantidad y no en el valor posicional, ya que al parecer no conocían la propiedad posicional. Se guiaron por la cantidad de tornillos y lápices que habían.

Observemos la respuesta que dio uno de los niños:

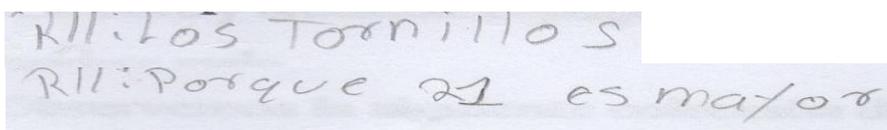
A photograph of a piece of white paper with handwritten text in black ink. The text is written in Spanish and reads: "R11: Los Tornillos" on the first line and "R11: Porque 21 es mayor" on the second line. The handwriting is somewhat cursive and appears to be from a child.

Figura 3

Uno de los errores cometidos por los niños fue el de relación de cantidades, ya que no especificaron que veintiún tornillos representaban veintiuna unidades sueltas.

Se observa que los niños han adquirido cabalmente la habilidad de conteo, ya que en esa parte del problema no se encontró ningún error.

Problema #2

Esta actividad se realizó a través de material semi-concreto, en equipos de cuatro integrantes. Se les pidió a los niños que comenzaran con un grupo de diez flores, luego que a ese grupo le sumaran una flor. Luego se les preguntó, por la cantidad de flores que habían en el grupo. Tenían que especificar además, cuantas flores había en el lugar de las decenas y en el lugar de las unidades.



Los cuatro grupos respondieron correctamente a la cantidad de flores que habían, dieron respuestas tales como: “Hay 11 flores”. El grupo de Jack, Lorena, Kellin y Margori, contaron muy bien la cantidad de flores, pero al parecer no habían desarrollado la zona de construcción, ya que en el lugar de las decenas hay diez y en el de las unidades hay una. Ya que afirmaron que habían seis decenas y ocho unidades de flores. Lo cual es incorrecto, ya que hay una decena y una unidad de flores. Observemos lo que contestaron:

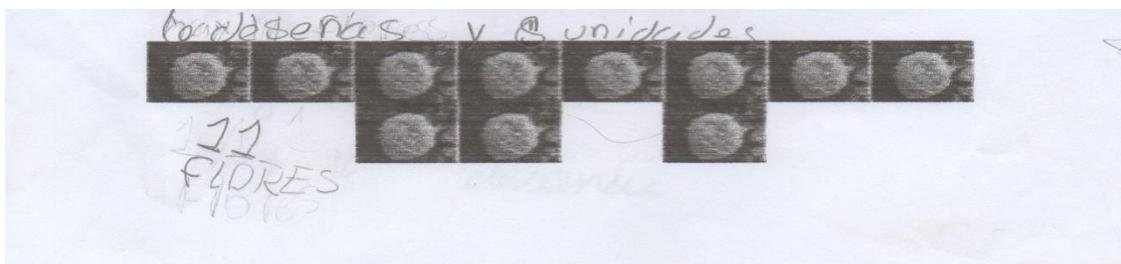


Figura 5

Al parecer le dieron una mala interpretación a la pregunta, ya que trataron de responder la cantidad de decenas y unidades que habían.

Así que uno de los errores cometidos es que confundieron el valor de las decenas y unidades en el numeral, con la cantidad de objetos que había en el lugar de las decenas y unidades.

Problema #3

Se les presentó a los niños una colección de frutas reales ordenadas no canónicamente, para que hubiese una mayor motivación al momento de desarrollar las actividades. Se les pidió especificar la cantidad de frutas que había de cada grupo. Además que las ordenaran de mayor a menor y de menor a mayor.



Con este problema se pretendía que los niños comprendieran la habilidad de relación de orden, ya que tenían que ubicar la cantidad de frutas de mayor a menor y viceversa. Tenían que comenzar agrupando las dos uvas, las tres zanahorias y los cuatro limones. Y luego ordenar las agrupaciones de mayor a menor y de menor a mayor.

La mayoría de los alumnos contestó correctamente, al manifestar que había una manzana, dos uvas, tres zanahorias y cuatro limones. Uno de los niños ordenó correctamente las frutas de menor a mayor y de mayor a menor. Se puede observar que presentaron dificultades al relacionar las cantidades entre sí, ya que al relacionarlas estarían comparando donde hay

mayor o menor cantidad de objetos, esto es que no habían desarrollado del todo la habilidad de relación de números.

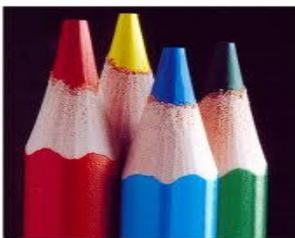
Uno de los errores que cometieron fue que no supieron establecer una relación de correspondencia de números a objetos. El grupo de compuesto por Daniel, Joseph, escribió lo siguiente

Problema #4

Este problema tiene como propósito afianzar los conocimientos que tienen los niños acerca de la comparación de cantidades y desarrollar la habilidad de relacionar números. Esta etapa se considera indispensable para la adquisición del concepto del valor posicional.

Esta actividad se realizó a través de material concreto. Se le proporcionó 4 lápices y 3 caramelos a cada niño. La actividad era la siguiente:

Compara el número que representan los objetos de la izquierda con los de la derecha



- a) ¿Es menor, mayor o igual la cantidad de caramelos, con respecto a la cantidad de lápices?

- b) ¿Por qué?

En la realización de esta actividad todos los niños respondieron muy bien, manifestando que la cantidad de lápices era mayor que la cantidad de caramelos, ya que habían cuatro unidades de lápices y tres unidades de caramelos. Por ejemplo una de las estrategia que utilizo un niño fue, comparar la cantidad de lápices con la cantidad de caramelos uno a uno. Estableció la relación de correspondencia entre las cantidades, para llegar a la misma conclusión que los demás niños. En el caso de Kevin respondió que el cuatro es mayor que el tres porque lleva una unidad más. Comparó la cantidad de unidades entre la primera cantidad y la segunda cantidad.

Para tener una mejor idea, observemos lo que escribió:

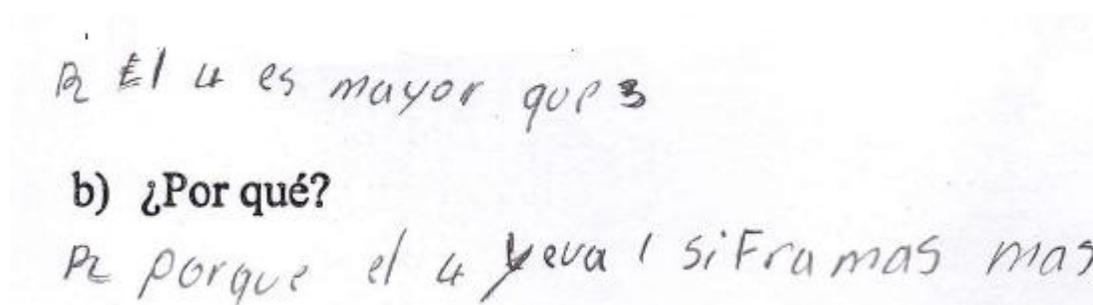


Figura 17

Actividad No10

Problema #1

En este problema se utiliza la representación de un número, a diferencia de la anterior que tenían que establecer la correspondencia de objetos a un número. Se les proporciono a los niños dos tarjetas, una con el número 69 y la otra con el número 37. Se les pregunto cuál de los dos números era mayor y por qué.



En general, el desarrollo de esta actividad fue muy buena, ya que los 14/13 niños respondieron como se esperaba, al manifestar que el número mayor es el 69 y el menor 37. Pero al momento de justificar la respuesta, una niña presentó dificultades ya que confundió el valor absoluto del número con el valor posicional. Al manifestar que el 69 es el mayor porque seis es mayor que tres. Para ella el número mayor es el que manda, en el sentido de que el valor absoluto del número correspondía a la posición de las decenas. Contesto lo siguiente:

a) ¿Cuál es mayor?

el número 69

b) ¿Cuál es menor?

el número 37

c) ¿Por qué?

Porque el 6 es mayor que 3

Figura 18

Los demás niños justificaron muy bien la respuesta, algunos de ellos manifestaron que es mayor el número 69 porque en forma desagrupada hay 69 unidades y en la otra cantidad hay 37 unidades, por tanto el 69 es mayor. Al final de la actividad cada uno de los niños dio su opinión y la niña que presentó la dificultad, llegó a la conclusión correcta por sí sola.

Actividad #2

Se le presentó a cada uno de los alumnos un grupo de dos monedas una de diez centavos y la otra de cincuenta centavos y en otro grupo cuatro monedas de diez centavos. Se les pidió que compararan las cantidades entre sí, además que justificaran su respuesta.

Solamente 2/ 14 niños respondieron incorrectamente, diciendo que la cantidad de las monedas de a diez representaban una mayor cantidad, esto evidencia que estos niños pensaron en función de la cantidad de monedas y no en función del valor de la moneda.

El resto de los niños contestó exitosamente, al manifestar que en la cantidad de monedas de la izquierda hay cincuenta y cinco centavo y en la izquierda hay cuarenta centavos, porque 55 es mayor que 40. Observemos la estrategia que utilizó la niña Dayana. Ella sumo la cantidad de monedas del primer grupo y la cantidad de monedas del segundo grupo, afirmando que en el primer grupo hay 55 centavos y en el segundo hay 40 centavos. Pero no hay ninguna evidencia escrita, si no que ella utilizó la estrategia del cálculo mental. Esto implica que los niños van desarrollando habilidades que involucra el desarrollo del concepto del valor posicional.

b) ¿Por qué?
La de lado izquierda es mayor
La de lado derecho es menor
Porque en el lado izquierdo ha 55
Centavos
y los del lado derecha solo
hay 40

figura 19

Actividad #11

4.2.5 Etapa de Comprensión

Objetivo: Esta actividad se realizó en grupos de cuatro niños, se buscaba que los niños llegaran a la etapa de comprensión del valor posicional

Actividad #1

Jorge quería dos juguetes de la tienda, uno costaba 34 lempiras y el otro 25. A Jorge le dio curiosidad: ¿Estaría el costo total de los juguetes en los 40tas, 50tas o 60tas? ¿Tú qué le dirías a Jorge? Explícame.

En el desarrollo de este problema no se presentó ninguna dificultad ni se detectaron errores, ya que en problemas anteriores habían mostrado un buen manejo en las etapas del desarrollo del concepto.

Observemos lo que respondieron los del grupo compuesto por: Jaime, Joseph, Mauricio y Jack.


$$\begin{array}{r} +34 \\ +25 \\ \hline 59 \end{array}$$

50

Figura 78

Se observa que utilizaron como estrategia la suma de doble columna, al sumar las cantidades de “34” más “25” lempiras, ellos respondieron que la suma es igual a “59”, y que el costo total estaba entre los cincuenta y sesenta.

Al contestar la pregunta que donde estaría el costo total de los juguetes, si entre los 40tas, 50tas o 60tas. Ellos utilizaron la estrategia de comparación de cantidades, para dar respuesta.

Otra estrategia utilizada por uno de los grupos, fué que escribieron el valor desarrollado de cada cantidad y luego sumaron las cantidades desarrolladas correspondientes a las decenas con decenas y unidades con unidades, y por último sumaron las decenas con las unidades, manifestando que la suma total era de cincuenta. Todos utilizaron diferentes estrategias, pero llegaron a la misma conclusión.

No se observó ninguna dificultad por parte de los equipos, esto nos muestra que han adquirido la habilidad del agrupamiento.

Problema #2

En un juego de la feria, cada pelota estaba marcada con los números 11 y 99. Jorge recogió dos bolas y sumó los números. Después invirtió los dígitos de los dos números y los volvió a sumar. Haz lo que hizo Jorge y di qué suma es mayor.

Todos los grupos respondieron correctamente. Observemos el caso del grupo compuesto por Luis, Esteba, Kevin y Kellin, ellos sumaron once mas noventa y nueve, utilizando la suma de doble columna como estrategia, les dio 110. Se dieron cuenta que al invertir los dígitos de las dos cantidades los números y la suma eran iguales.

Para tener una mejor idea de lo que hicieron, se muestra el procedimiento:

Figura 79



The image shows two handwritten mathematical expressions in blue ink. On the left is a vertical addition problem:
$$\begin{array}{r} 11 \\ + 99 \\ \hline 110 \end{array}$$
 On the right is the number 110 written in a simple, slightly slanted font.

A otro grupo se les presentó el mismo problema, pero con la variación de que cada pelota estaba marcada con los números entre el 11 y 99

El grupo compuesto por los integrantes: Katherine, Lorena, Marjori y Lizzy contestaron correctamente a la actividad planteada. Ellos escogieron el número “97” y “72”. Después invirtieron los dígitos y como estrategia para sumar, utilizaron la suma de doble columna y compararon las dos cantidades. Hicieron todo el procedimiento correctamente, pero no contestaron a lo que se les preguntaba. Evidentemente, la cantidad mayor es 169. Observemos lo que hicieron:

Handwritten mathematical work showing four different calculations:

- 770419914
79
27
1015
- 97772
79 27
- 97
72

769
- 77
99

776

Figura 80

Una de las habilidades adquiridas por los alumnos fue la comparación de cantidades.

Problema #3

En el problema se les decía: Jorge vio trabajar toda la mañana al señor del sombrero amarillo.

Había envuelto en paquetes de 10, 134 caramelos para darlos de premios, pero necesitaba 260.

Jorge quería saber: ¿cuántos le faltaban envolver?

Todos, los grupos respondieron correctamente a la actividad planteada. No se presentaron dificultades ni errores. Las respuestas del grupo compuesto por: Katherine, Lorena, Marjory y Lizzy fue la siguiente:



The image shows a handwritten subtraction problem on the left and a note on the right. The subtraction is performed using the double-column method. The number 260 is written with a small '5' above the '0'. The number 134 is written below it, with a horizontal line between them. The result, 126, is written below the line. To the right of the calculation, the text reads: "Le faltaban cruales 126 caramelos".

$$\begin{array}{r} 2\overset{5}{6}0 - \\ 134 \\ \hline 126 \end{array}$$

Le faltaban cruales 126 caramelos

Figura 81

Supieron identificar el tipo de operación que debían realizar y como estrategia utilizaron la resta de doble columna para restar las cantidades “260” y “134”, posteriormente dieron respuesta a la interrogante planteada al manifestar que le faltaban “126” caramelos. Esto nos muestra que los niños han tenido un notable desarrollo en los conocimientos del concepto del valor posicional, ya que en este problema se muestra de forma implícita el valor posicional en el desarrollo del problema, al colocar las unidades bajo unidades y las decenas bajo decenas.

Una de las habilidades adquiridas fue la de identificar el tipo de operación que debían realizar.

Problema #4

El problema respectivo era: Jorge tiene 270 estampas. Compró dos álbumes: Uno era para 132 estampas y el otro para 145. Jorge quería saber si le cabrían todas sus estampas en los dos álbumes.

Todos los grupos respondieron exitosamente a la interrogante planteada. Observemos lo que respondieron los niños compuesto por los integrantes: Luis, Esteban, Kevin y Kellin

$$\begin{array}{r} 132 \\ + 145 \\ \hline 277 \end{array}$$

No le cabran en los
2 álbumes.

Figura 82

Para resolver este problema identificaron el tipo de operación a realizar y luego sumaron 132 más 145, utilizando como estrategia utilizaron la suma de doble columna y finalmente justificaron correctamente su respuesta, al afirmar que los 277 estampas no caben en el álbum ya que el álbum solo es para 270 estampa.

Observemos el caso del grupo compuesto por: Jaime, Joseph, Mauricio y Jack.

$$\begin{array}{r} 132 \\ + 145 \\ \hline 277 \end{array} \quad \text{si le caben}$$

Figura 83

Ellos identificaron correctamente la operación a realizar y la estrategia que utilizaron fue la suma de doble columna, pero al momento de justificar su respuesta lo hicieron incorrectamente, al manifestar que las estampas caben en los dos álbumes.

Al parecer estos alumnos no comprendieron la respuesta, ya que respondieron que las 277 estampas caben en el álbum.

Una de las habilidades afianzadas fue la de relación de orden, ya que para dar respuesta a la pregunta tenían que comparar cual de las dos cantidades entre 277 y 270 era la mayor.

Actividad No12

Problema #1

Un juego en la feria consistía en escribir números de forma que cuando se invirtieran los dígitos para formar un nuevo número, la suma estuviera entre 100 y 125 ¿Con qué números podría ganar Jorge?

En el desarrollo de esta actividad no se presentó ningún problema, ya que los niños respondieron correctamente a la interrogante planteada.

Jaime escogió dos números el 19 y el 23, luego invirtió sus dígitos y sumó 91 más 32, y la suma total le dió 123. Esta cantidad estaba entre 100 y 125, con estos números podría ganar Jorge en la feria.

$$\begin{array}{r} 19 \\ 23 \\ \hline 91 \\ 32 \\ \hline 123 \end{array}$$

Problema #2

El señor de la tienda le dijo a Jorge que podía comprar los caramelos sueltos, en paquetes de 10 cada uno o en cajas de 100. Si necesitaba 804, ¿De qué formas diferentes podía comprarlos? Después se dio cuenta que iba a necesitar 1200. ¿Cuántos más tenía que comprar?

Observemos el caso de Kevin, al parecer no interpreto correctamente el problema, ya que el describió de cuantas formas diferentes podía comprar 1200 caramelos, y lo que se le preguntaba era, de cuantas formas diferentes podían comprar 804 caramelos, pero si conocía la equivalencia de centenas a decenas, de decenas a unidades.

de 100 en 100 Porque en 100 hay 10 D y en 10 es = a 10 unidades
Porque 100 es = a C y 10 = a U

Figura 85

Problema #3

El señor de la tienda le dijo a Jorge que se asomara a la bolsa para ver los dulces. Habían dulces sueltos, paquetes de diez y cajas de cien. Jorge contó 2 cajas, 23 paquetes y nueve dulces sueltos. Jorge quería saber ¿cuántos dulces había ahí?

Observemos el caso de Kevin, el respondió que en 2 cajas habían 200 dulces y en 23 paquetes 230 dulces, más los 9 dulces sueltos. Utilizó como estrategia la suma de doble columna para responder que había 439 dulces.

$$\begin{array}{r} 200 \\ 230 \\ \hline 430 \end{array}$$

Figura 86

En este problema no se presentó ninguna dificultad, ni errores cometidos por los alumnos. Todo se desarrolló exitosamente.

Evaluación final

Con el objetivo de evaluar la comprensión que cada uno de los niños había tenido, acerca de las etapas del desarrollo del valor posicional, las habilidades que involucra el desarrollo, y las etapas del sentido numérico se aplicó la actividad No13, en donde se les planteó situaciones similares a las de la prueba diagnóstica, con el propósito de que el alumno expresara estrategias propias y observar si habían superado las dificultades y errores más comunes.

Se considero pertinente proponer las siguientes actividades:

Numeral 1)

Juan tiene en su corral 2 centenas de pollitos, 3 decenas y 6 unidades en el gallinero.



En el inciso a) del numeral 1, se les pregunto acerca de la cantidad de pollitos que habían.

Todos los niños respondieron acertadamente a la pregunta planteada. Se observaron estrategias similares de parte de los niños como la siguiente: Manifestaron que en 2 centenas habían 200 pollitos, en 3 decenas, 30 pollitos y en 6 unidades, 6 pollitos. Posteriormente, utilizaron como estrategia la suma de doble columna para sumar las cantidades de 200,30 y 6, manifestando que la el total de pollitos es 236. Observemos lo que respondió Jaime:

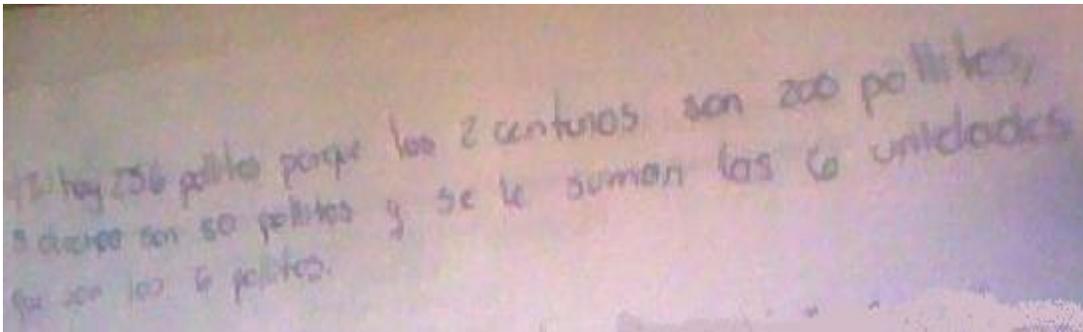


Figura 93

En el inciso b), se les interrogó acerca de la cantidad de dígitos que tiene el número que representa la cantidad de pollitos.

En la solución de este problema no se presentaron dificultades, la estrategia más utilizada fue el conteo de dígitos, al manifestar que en la posición de las centenas había un dígito, en la de las decenas había otro y en el de las unidades uno más. Por tanto el total de dígitos era tres.

Observemos lo que escribió un alumno:



Figura 94

Queda evidenciado que los niños saben que el numeral completo representa la cantidad total y los dígitos por separado tienen un valor posicional.

En el inciso b), se les pedía que indicaran la posición de cada dígito.

Todos los niños respondieron acertadamente a lo que se les pedía, la mayor parte afirmó que el dígito 2 estaba en la posición de las centenas, el dígito 3 en la posición de las decenas y el 6 en la posición de las unidades.

Para tener una mejor idea observemos lo que hizo un alumno:

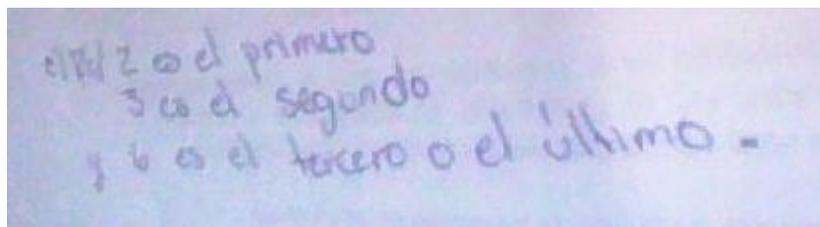


Figura 95

Numeral 2

Esta actividad se realizó con el propósito de conocer si el niño había superado las dificultades y errores acerca de la comparación de cantidades.

En la escuela de Sandra celebraron la feria en 3 días seguidos

En el primer día llegaron 4231 personas

En el segundo día llegaron 3524 personas

En el tercer día llegaron 3142 personas



a) ¿En qué día llegaron más personas?

Cada niño dio respuesta exitosamente a la interrogante planteada.

Observemos el caso de Kevin, además de especificar la cantidad de personas que llegaron el primer día, expreso el número 4231 en términos de unidades de millar, centenas, decenas y unidades.

Primer día 4 231 4 M 2 C 3 D 1 U

Figura 96

En la mayoría de los niños se observó la misma estrategia, establecieron comparación entre las cantidades, primero compararon 4,231 con 3524, afirmando que el mayor era 4,231, luego esta misma cantidad con 3,142, concluyendo que la mayor era 4,231. Por tanto el primer día llegaron más personas.

En el inciso b), se les preguntó en que día habían llegado más personas

Al realizar el problema del inciso anterior, llegaron a la conclusión que el tercer día habían llegado menos personas a la feria.

La respuesta de Víctor es la siguiente:

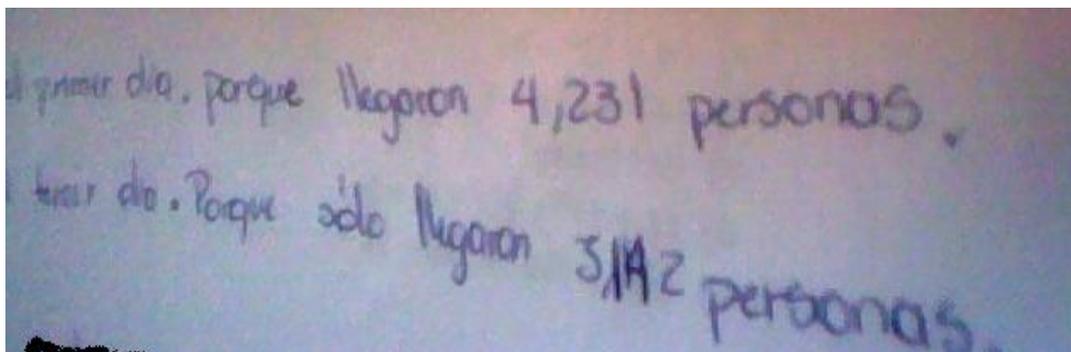


Figura 98

Además se les pidió que establecieran una comparación entre las dos cantidades y justificaran su respuesta.

Cecilio manifestó que la primera cantidad es mayor que la segunda, ya que hay una mayor cantidad de centenas, decenas y unidades respectivamente.

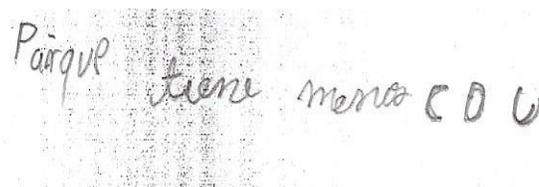


Figura 99

Numeral 3)

Si tenemos 23 caballos:



¿Cuántas decenas representan 23 caballos? ¿Cuántas unidades?

Todos los niños respondieron excelentemente a la pregunta planteada, manifestando que habían dos decenas y tres unidades en 23 caballos. En la mayoría de los niños se observó la misma estrategia, manifestando que en dos decenas hay veinte caballos y utilizaron la suma de doble columna al sumar $20D+3U$.

La respuesta de Víctor Daniel fue la siguiente:

al 2 el Representa 2 decenas y 3 unidades. las 2 d. son 20 caballos y las 3 unidades son 3 caballos

Figura 100

Con respecto a la cantidad de unidades que habían en 23 caballos, todos los niños respondieron exitosamente. Al manifestar que en 23 caballos, hay 23 unidades de forma desagrupada y en forma agrupada hay 3 caballos nada más.

Observemos la respuesta de Jaime:

b) Pa) Represento 23 unidades. Las 23 unidades son los 23 caballos.

Figura 102

Se observa que los niños han ido superando las dificultades y los errores más comunes presentados en la prueba diagnóstica. Por otro lado, es necesario indicar que gran parte de las dificultades que tienen los niños y los maestros en formación, con los números decimales tienen su origen en el modo en que estos se enseñan en la escuela. Ya que no se comienza a desarrollar las habilidades del concepto del valor posicional, si no que quieren que los niños comiencen a sumar, restar, multiplicar y dividir, sin haber comprendido el concepto.

Numeral 4)

Escribe el número que corresponda a cada una de las cantidades:

4 unidad =

15 unidades =

4 decenas =

5 decenas y 5 unidades =

3 decenas, 3 unidades =

Las estrategias utilizadas fueron las mismas en todos los niños, una de las respuestas de los niños fueron las siguientes:

4 unidad = 4
 15 unidades = 15
 4 decenas = 40
 5 decenas y 5 unidades = 55
 3 decenas, 3 unidades = 33

Figura 104

Todos los niños dieron respuestas acertadas, manifestando que 4 unidades equivalía al número cuatro, las 15 unidades al número quince, 4 decenas al número 40, en 5 decenas y 5 unidades equivale a cincuenta y cinco, en 3 decenas y 3 unidades, corresponde al número treinta y tres.

Al respecto (Ross, 1990, pag.1) afirma que cuando las niñas o niños sabían que en un numeral de dos dígitos, el de la derecha estaba en el lugar de las unidades (unos) y el de la izquierda en el de las decenas (dieces), pero ese conocimiento se limitaba al nombre del lugar y no se vinculaba con cantidades.

Numeral 5)

El loro de Carlos come 1 decena y 3 unidades de semillas, mientras que el de Jorge come 3 decenas y 1 unidad. ¿Cuál de los loros come más? ¿Por qué?

Todos los niños respondieron exitosamente a la pregunta planteada. Las respuestas de los niños fueron las siguientes:

Para el caso de Víctor, proporcionó la cantidad de semillas que come el loro de Jorge, pero no justifico la respuesta.

el de jor como 31 semillas

Figura 106

Observamos a Kevin, en su respuesta está bien. Además supo argumentarla al manifestar que 3 decenas de semillas equivalen a 30 semilla y 1 decenas era equivalente a diez semillas por tanto el loro de Jorge comía mas. Es notable el avance que han tenido los niños en el aprendizaje del concepto del valor posicional con respecto a las primeras actividades.

El de Jorge. Porque $30=30$ y $10=10$ por eso come mas
El de Jorge

Figura 107

Observemos la estrategia que utilizó Jack:

el de Jorge come mas
31 es mayor que el 13

Figura 108

La estrategia que utilizo Jack, fué la de comparación de cantidades no agrupadas.

Numeral 6)

Escriba los siguientes números en forma desarrollada

- a) 4700
- b) 2051
- c) 1019

Joseph contestó bien la pregunta, pero no dejó ninguna evidencia de las estrategias utilizadas.

d) 4700 4000 + 700

e) 2051 2000 + 51

f) 1019 1000 + 19

Figura 109

Para el caso de Kevin, contesto correctamente a la actividad planteada, especificando la posición de las unidades de millar, centenas, decenas y unidades en cada cantidad. Esto nos muestra que ha afianzado la propiedad de base diez.

d) 4700 4000 M + 700 C + 00 D + 00 U = 4700

e) 2051 2000 M + 000 C + 50 D + 1 U = 2051

f) 1019 1000 M + 000 C + 10 D + 9 U = 1019

Figura 110

Numeral 6

Jorge vio en la feria una computadora que mostraba casas que estaban en una larga fila. Las casas estaban numeradas empezando por el 325. Jorge apretó un botón y lo llevó a la casa 418. ¿Estaba Jorge más cerca de la casa 372 o de la 485? ¿Cómo sabes?

Jaime, al responder a la actividad planteada comparo el valor absoluto de la cantidad de 485 con respecto a la cantidad de 372.

Uno de los niños utilizó como estrategia la resta, lo que hizo fué restar 372 con 325, entonces concluyo que la diferencia entre esos dos número era de 47, luego a 485 le resto 418, indicando que la diferencia era de 67. Por último restó 418 con 372 y le dio 46. A la conclusión final que llegó es que Jorge estaba más cerca de la casa 372. Ya que la distancia era de 46.

Una de las conclusiones a las que llegó Ross, fue que el concepto de valor posicional se desarrolla durante un periodo de varios años, y que por lo general no se adquiere sino hasta los ocho o diez años de edad. La autora también consideró que era necesario el nivel de comprensión para entender los algoritmos convencionales de suma y resta de doble columna.

CAPÍTULO 5

5.1 CONCLUSIONES

Esta investigación se llevo a cabo con el propósito de contemplar no sólo lo relacionado al desarrollo del concepto del valor posicional en la escritura de números, si no contemplar las dificultades y errores más comunes que se dan al operar con determinada cantidad de dígitos.

A continuación se presentan las conclusiones de cada una de las preguntas que guiaron esta investigación:

- 1) Se detectaron errores y dificultades al trabajar con situaciones que involucran el desarrollo del concepto del valor posicional, cabe mencionar que se dieron con mayor frecuencia en la prueba diagnóstica, dichos errores y dificultades fueron superadas durante el proceso. Entre los cuales se pueden mencionar:
 - a) No habían adquirido cabalmente ninguna de las habilidades que involucra el desarrollo del concepto de valor posicional.
 - b) No manejaban ninguno de los niveles del proceso de desarrollo del concepto.
 - c) No sabían identificar la operación que debían realizar al momento de operar con decenas, centenas y unidades.
 - d) Tomaban el cero como la ausencia de cantidad.

- 2) El segundo objetivo planteado en esta investigación es lograr una descripción general de las distintas formas que entienden el concepto de valor posicional
 - a) Al referirse a los dígitos de una cantidad, los entendían como la partición de la cantidad total.

b) Entendían las decenas como conjunto de objetos de diez elementos y las unidades como objetos sueltos.

c) La posición de un dígito, la entendían como el valor que ocupaba el dígito en un numeral.

3) El tercer objetivo en esta investigación fue el de describir las estrategias utilizadas por los niños de cuarto grado, que a continuación se mencionan:

a) Esta investigación muestra que los niños se apropiaron sin mayor dificultad de la estrategia de conteo, partición, relación de número y agrupación de objetos.

b) Según los resultados mostrados en esta investigación los niños utilizaron la suma de doble columna para operar con numerales de diferentes dígitos.

c) Una de las estrategias utilizadas fue la de representación, ya que a través de esto los alumnos tenían una mejor idea de cómo resolver el problema.

4) El cuarto objetivo fue determinar el nivel del proceso de desarrollo del concepto del valor posicional en el que se encuentran los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona. Para ubicar a los niños en un nivel que integrara su desempeño general, se hizo una revisión de todas las respuestas que habían dado en las diferentes situaciones y se definieron cinco niveles de acuerdo al estudio de Ross (1990)

Numeral completo: Se observó que la mayoría de los niños adquirieron este nivel, ya que para ellos los dígitos por separado tenían un valor.

Propiedad posicional: Como se observa en los resultados de esta investigación, los niños alcanzaron un notable desarrollo en el manejo de esta propiedad, a medida se iban desarrollando las actividades.

Valor aparente: En esta etapa se encontraban los niños que le atribuían a los dígitos el valor absoluto de la cantidad que representaba independientemente de su posición.

Zona de construcción: En esta etapa los alumnos lograron reconocer la equivalencia correcta de una colección de objetos de forma agrupada y desagrupada.

Comprensión: En este nivel se ubica a los niños que superaron todas las dificultades presentadas en los niveles anteriores, ya que en esta etapa conocían el valor de los dígitos de manera confiable.

- 5) El quinto objetivo fue describir como los niños de cuarto grado de la escuela Sotero Barahona adquieren y construyen el sentido numérico
- a) Según los resultados de esta investigación, los niños no presentaron mayor dificultad en a reconocer textos numéricos y su significado.
 - b) Los resultados nos muestran que los niños lograron un gran avance en el proceso de desarrollo de la segunda etapa del sentido numérico, que es la de las operaciones básicas específicamente de la suma y resta.
 - c) En la última etapa resolvieron problemas de aplicación, acerca de la conceptualización del valor posicional, donde se mostró una gran avance en el desarrollo de las habilidades, ya que las operaciones de la adición y sustracción exigen que los alumnos fortalezcan el concepto del valor posicional.

5.2 RECOMENDACIONES

- a) Fomentar en los niños el uso de “estrategias de aprendizaje” significativas, como ser la estrategia de colección, agrupación, conteo, descomposición y recomposición y suma de doble columna, en la realización de cálculos que involucren numerales de varios dígitos, postergando y restándole importancia a la enseñanza formal de los algoritmos que implican al valor posicional.
- b) El uso de material concreto en el aula de clases, a partir de la etapa de conteo, partición, agrupación y relación de números de varios dígitos, para que los niños adquieran el concepto de valor posicional y después operar sin ninguna dificultad en la solución de problemas.
- c) Quedan líneas abiertas de investigación, tal vez las más importantes son las concepciones y preconcepciones que tienen los estudiantes al operar con numerales de varios dígitos en las operaciones básicas como ser la adición, sustracción, multiplicación, así como los números fraccionarios.
- d) Favorecer el trabajo en grupos por encima del individual y fomentar la reflexión y discusión de los alumnos en torno al valor posicional; específicamente sobre: Las reglas de construcción del sistema numérico, las magnitudes representadas por los números, los valores representados en los dígitos y el uso de agrupaciones en potencias de diez para contar colecciones. Todo esto en contraste con la resolución de ejercicios no mecánicos como los que contienen los libros de texto tradicionales.

- e) Que se procure el uso de métodos de enseñanza, que favorezcan los procesos de desarrollo conceptual de los niños, por ejemplo el enfoque de resolución de problemas.

5.3 REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Banco Mundial (2002-2006). Diseño Curricular Nacional Básico. Tegucigalpa, Honduras.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1982). The understanding of numeration in primary school.

Educational Studies in Mathematics 13, 33-57.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1986). Une etude des conceptions inappropriées developées par les enfants dans l'apprentissage de la numération au primaire. European

Bednarz, N. y Janvier, B. (1988). A constructivist approach to numeration in primary school.

Educational Studies in Mathematics 19, 299 - 331.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, France.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and theories of instruction in mathematics education. Educational Psychologist 23, 87-104.

Cobb, P. (1991). Reconstructing Elementary School Mathematics. Focus on Learning Problems in Mathematics 13(2). 3 - 32.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista*. (2ª. ed.). México: McGraw-Hill

Interamericana.

Fuenlabrada, I. y Saiz, I., (1984). *Sistema de numeración, suma y resta en la escuela*

Fuson, K. C. (1990). Issues in place-value and multi-digit addition and subtraction learning and teaching. Journal for Research in Mathematics Education 21(4), 237-280.

Fuson, K. C. y Kwon, Y. (1992) Korean children's understanding of multidigit addition and subtraction. Child Development 63(2), 491 - 506.

Primaria. Un estudio experimental. Tesis de maestría. Ciudad de México: Sección de Matemática Educativa, Departamento de Investigación Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

García de Clemente, C. (2002). *Enseñando a enseñar Aritmética*. Caracas: INED.

Gelman, R. y Gallistel, C. (1978): *The child's understanding of number*, Cambridge, Mass : Harvard University Press.

Gelman, R. y Meck, E. (1983): «Preschooler's counting: principles before skill», *Cognition*, 13,343-360.

Godino, J.D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada.

Godino, J.D. (2004). *Matemática para maestros*. Granada.

Jones, G., Thornton, C., Putt, I., Hill, K., Mogill, T., Rich, B. y Zoest, L. van. (1996).

Multidigit number sense: A framework for instruction and assessment. *Journal for Research in Mathematics Education* 27(3), 310 – 336

Kamii, C. (1992) *Reinventando la aritmética II*. Madrid:Editorial Visor

Labinowicz, E. (1985). *Introducción a Piaget. Pensamiento. Aprendizaje. Enseñanza*. Estados Unidos: Addison Wesley.

Lerner, D. (1992). “La matemática en la escuela aquí y ahora.”, Aique, Bs. As.

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). *El sistema de numeración: Un problema didáctico*.

Longa, J. (1998, Diciembre). *Hacia la construcción y uso del número en la escuela*.

Educación. Desarrollo del Pensamiento y matemática, (183), 31-40. Caracas: Ministerio de Educación.

Maninat, M. (1998). *Carpeta matemática para docentes de Educación Básica*. (Vol. 1)
Caracas.

Mirá, M. (1989). *Matemática “viva” en el parvulario*. España: CEAC.

Ministerio de Educación Pública (2005). *Programas de Estudio 2005. Matemática I Ciclo*.
Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública (2005). *Programas de Estudio 2005. Matemática II Ciclo*.
Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública (2005). *Programas de Estudio 2005. Matemática III Ciclo*.
Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública (2005). *Programas de Estudio 2005. Matemática
Educación Diversificada*. Costa Rica.

Miura, I. T., y Okamoto, Y. (1989) Comparisons of U. S. and Japanese first graders’
cognitive representation of number and understanding of place value. *Journal of Educational
Psychology* 81(1), 109 - 113.

Miura, I. T., Okamoto, Y., Chungsoon, C. K., Steere, M., y Fayol, M. (1993) First grader’s
cognitive representation of number and understanding of place value: Cross - national
comparisons - France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *Journal of Educational
Psychology* 85(1), 24 - 30.

Oviedo, M. (1998, Diciembre). Nociones lógico–matemáticas. Una propuesta Pedagógica.

José, M. (1997). *Educación. Desarrollo del pensamiento y matemática*, (183), 22-30. Caracas:
Ministerio de Educación.

Ross, S. (1990). Children's acquisition of place-value numeration concepts: The roles of cognitive development and instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 12(1), 117.

Steinle, V. (2004). *Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers.*

Disertación doctoral no publicada, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne. Australia.

Steffe, L. P., Cobb, P., y Glasersfeld, E. von. (1988). Construction of arithmetical meanings and strategies. New York: Springer - Verlag.

Yang, M. T. L. y Cobb, P. (1995) A cross-cultural investigation into the development of place-value concepts of children in Taiwan and the United States. *Educational Studies in Mathematics* 281 - 33.

ANEXO 1

Prueba diagnóstica

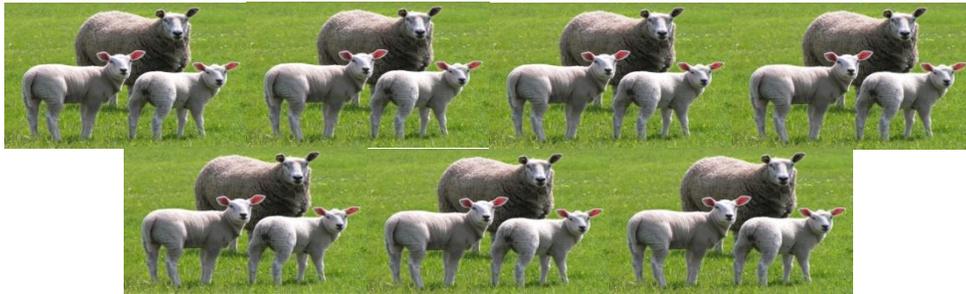
Objetivo: Explorar las ideas que los estudiantes tienen acerca del concepto de valor posicional, las dificultades y errores más comunes al trabajar con numerales de varios dígitos.

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan una serie de problemas, desarrolla cada uno según creas conveniente. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. Pedro tiene 21 ovejas en su rebaño, cada mañana cuida de ellas y por la tarde va a la escuela



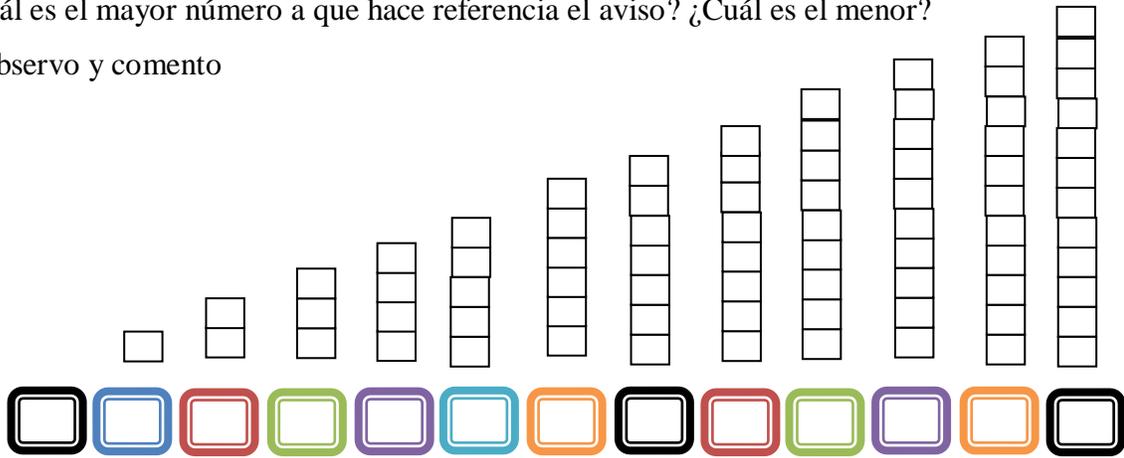
- a) ¿Cuántos dígitos tiene el número que representa la cantidad de ovejas?
- b) Indique la posición de cada dígito

2. Catalina observa la siguiente promoción de hamburguesas



¿Cuál es el mayor número a que hace referencia el aviso? ¿Cuál es el menor?

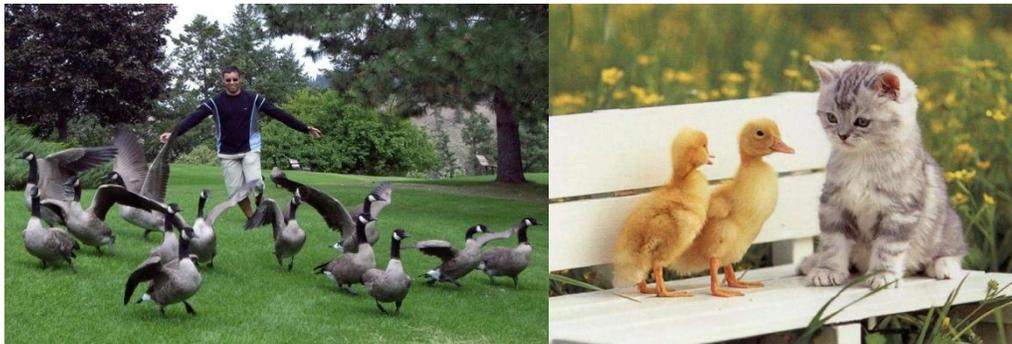
Observo y comento



Escriba los números de los cuadrados en las casillas

¿Cuántas decenas y unidades tienen los números 10 y 12?

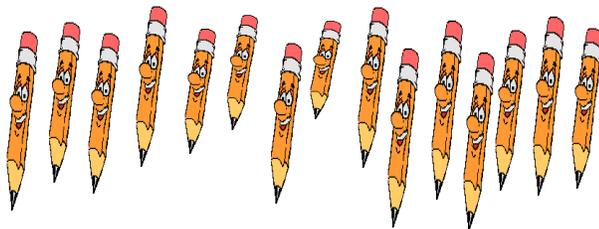
3. ¿Cuántos animales hay en cada grupo?



Hay _____ gansos.

Hay ____ gansos y ____ gato.

4. Cuenta. ¿Cuántos lápices hay?



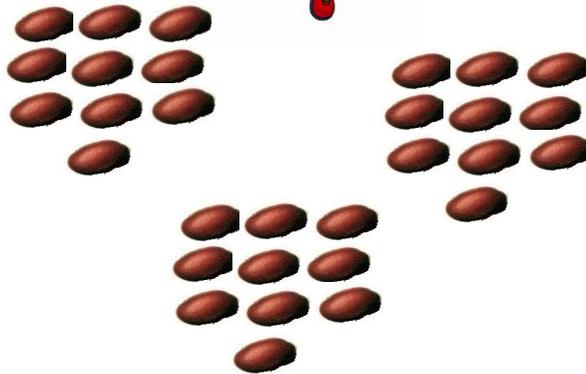
Hay _____ decenas y _____ unidades

5. Observo y comento

María



José



Compara entre María y José la forma de contar los frijoles

¿Como los cuenta María? ¿Como los cuenta José?

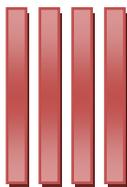
Cuenta los frijoles formando decenas y unidades

_____ decenas y _____ unidades.

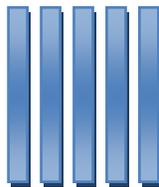
_____ decenas y _____ unidades

6. ¿Cómo se dice la cantidad formada por 4, 5 y 6 decenas?

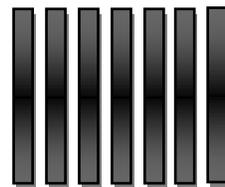
4 decenas



5 decenas



6 decenas



¿Cuántas unidades hay en 4, 5 y 6 decenas?

7. Cuál es el número formado por tres decenas y tres unidades:



Tres decenas



Tres unidades

8. Cuál de los siguientes dígitos tienen mayor valor posicional

a) En las siguientes cantidades 1,345 y 937

Entre el 1 y el 9 ¿Cuál tiene mayor valor posicional?

b) En las siguientes cantidades 39,728 y 94,715

Entre el 7 de la primera cantidad y el 7 de la segunda cantidad ¿Cuál tiene mayor valor posicional?

Entre el 8 y el 5 ¿Cuál tiene menor valor posicional?

Entre el 9 de la primera cantidad y el 9 de la segunda cantidad ¿Cuál tiene mayor valor posicional?

9. Si tenemos 3,457 pelotas de diferentes colores



Escriba en forma desarrollada el número de pelotas

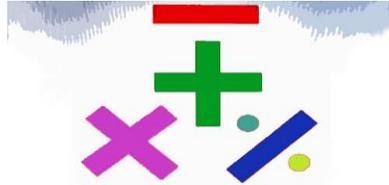
Hay ____ millares.

Hay ____ centenas

Hay ____ decenas

Hay ____ unidades

10. Sume: $1,239+756+5,721+2$



11. El lunes Jorge contó 33 pétalos. El martes 30 más. ¿Cuántos contó en total?

12. A Jorge le dio curiosidad cuando escuchó a la señora del abrigo rosa decir que tenía 64 caramelos pero que necesitaba tener 87. ¿Cuántos caramelos le faltaban a la señora?
¿Cuántas decenas le faltaban a la señora?

ANEXO 2

Actividad No.1 (Conteo)

Representación del valor posicional a través de material concreto

Objetivo: Explorar las distintas formas de reagrupar objetos, a través de material concreto en alumnos de 4to grado

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan una serie de problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. Observemos la siguiente colección de fósforos. ¿Cuántos fósforos hay ahí? Hacer lo necesario a fin de que cuando otro niño o niña los vean, puedan decir rápidamente ¿Cuántos fósforos hay? (Conteo)



2. De la siguiente colección de objetos, forme un grupo de 12 lápices y un grupo de 21 tornillos.



a) ¿Cuál representa una cantidad mayor? (Zona de construcción)

b) ¿Por qué?

3. Tenemos una colección de frutas ordenadas de diferentes formas: (Relación de orden)



a) Ordénelas de menor a mayor

b) Ordénelas de mayor a menor

Actividad No2

Representación de las centenas, decenas y unidades a través de material semi-concreto

Objetivo: Conocer e identificar el lugar de las centenas, decenas y unidades, dado un grupo de objetos.

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan 3 problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

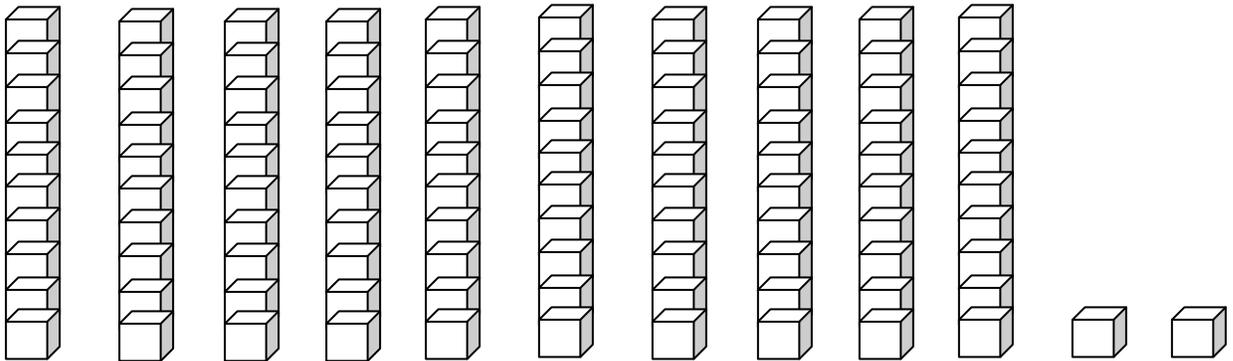
1. Empieza con un grupo de diez flores. Súmale una flor a este grupo. ¿Cuántas flores tienes ahora? Especifica cuántas flores hay en el lugar de las decenas y las unidades. (Zona de const)



2. Hay un grupo de diez corazones. Súmale diez corazones a este grupo. ¿Cuántos corazones tienes ahora? ¿Cuántas decenas hay? ¿Cuántas unidades hay? (Prop. posicional)



3. Hay diez grupos de diez cubos cada uno. Súmale dos cubos a este grupo. ¿Cuántos cubos tienes ahora? ¿Cuántas centenas hay? ¿Cuántas decenas hay? ¿Cuántas unidades hay? (P.posi)



Actividad No3

Conteo y agrupación de objetos.

Objetivo: Identificar los dígitos de una cantidad y reagrupar objetos, a través de material concreto en alumnos de 4to grado

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan 3 problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. Dada la siguiente colección de números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8 y 9.

c) ¿Cuántos dígitos hay? (Numeral completo)

d) ¿Cuántos números podemos formar con todos los dígitos anteriores? (N. compl)

2. Pedro tiene en su jardín 2 decenas y 3 unidades de flores, cada mañana las riega y por la tarde va a la escuela



c) ¿Cuántas flores tiene Pedro? (Conteo)

d) ¿Cuántos dígitos tiene el número que representa la cantidad de flores? (N. com)

e) Indique la posición de cada dígito (Valor Posic)

Actividad No4

Verbalización y representación.

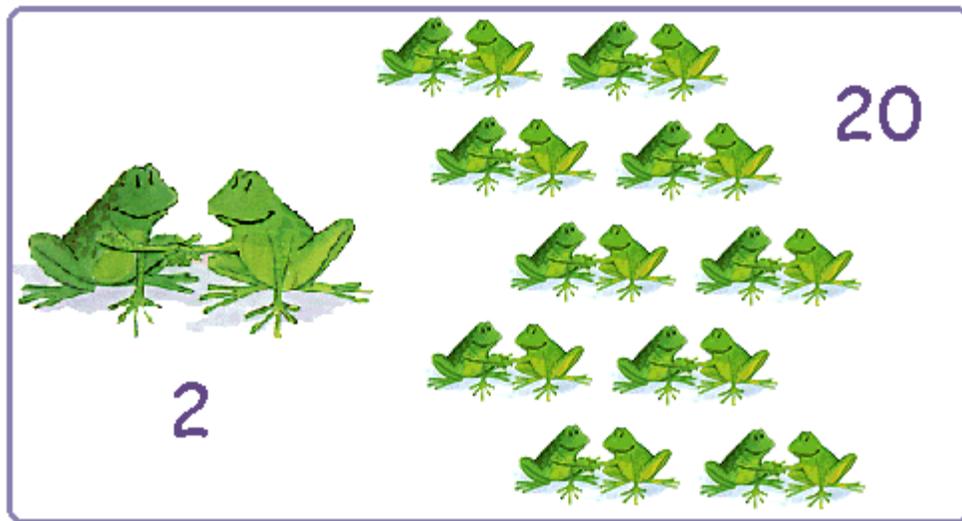
Objetivo: Explorar las distintas formas de reagrupar objetos, a través de material concreto en alumnos de 4to grado

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan 3 problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. Tenemos en una tarjeta el numeral “28”
 - a) Colocar veintiocho cubos sueltos, o dos tiras de diez y ocho sueltos, o una tira de diez y dieciocho sueltos.
2. En las cantidades 2 y 20, ¿en cuál vale más el número 2? ¿Por qué? (Prop. Posic)



Actividad No5

Comparación de números cantidades

Objetivo: Explorar las distintas formas de comparar números y cantidades, a través de material concreto en alumnos de 4to grado

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan 3 problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. Compara el número que representan los objetos de la izquierda con los de la derecha



- c) ¿Es menor, mayor o igual? (Comparación de cantidades)
- d) ¿Por qué?

2. Compara el número de la izquierda con el de la derecha



- a) ¿Cuál es mayor? (Rel. números)
- b) ¿Cuál es menor?
- c) ¿Por qué?

3. Compara las monedas de la izquierda con las de la derecha



a) ¿Cómo son entre si estas dos cantidades? (Relac. Orden)

b) ¿Por qué?

Actividad No6

Verbalización y representación.

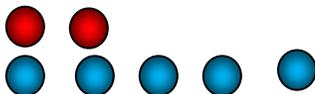
Objetivo: Explorar las distintas formas de reagrupar objetos, a través de material semi-concreto en alumnos de 4to grado

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan 3 problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. Las fichas de color azul representan las unidades y las fichas de color rojo representan las decenas. (Valor posicional)



- a) ¿Cuántas decenas representan las fichas rojas?
 - b) ¿Cuántas unidades representan las fichas azules?
 - c) ¿Qué número representan las fichas rojas y azules?
1. Dadas las cartas con numerales del 0-9, nombre dos números en voz alta
- a) ¿Qué números se forman con sus cartas? (Valor posic.)
 - b) Forme con sus cartas seis cantidades de mayor y menor valor (Relac. De orden)
 - c) Elija dos de las cantidades que formo y tome una carta de cada una de ellas. Cuál de las cartas tiene mayor valor dentro de las cantidades a las que pertenecen.

Actividad No7

Posición de un dígito

Objetivo: Expresar un número, según la posición que ocupa o bien su valor relativo

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan 3 problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. Juan tiene 5 unidades de láminas de Pokémon y Pedro tiene 2 decenas. ¿Quién tiene más? ¿Por qué?
2. El perro de Raúl come 1 decena y 3 unidades de huesos, mientras que el de Jorge come 3 decenas y 1 unidad. ¿Cuál de los perros come más? ¿Por qué?
3. En un partido de básquetbol jugado en la cancha del colegio, los jugadores de los equipos Segundo A y Segundo B marcaron la siguiente cantidad de goles:

Equipo Segundo A	Equipo Segundo B
Rodrigo, 1 decena y 4 unidades	Fabián, 3 decenas
Marcos, 2 decenas	Luis, 1 decena y 7 unidades
Pedro, 5 unidades	Daniel, 2 unidades
Álvaro, 1 decena	

- a) ¿Quién fue el goleador del partido?, ¿Cuántos goles convirtió?
- b) ¿Cuál fue el resultado final del partido?

Actividad No 9

Representación de números en forma desarrollada

Objetivo: Explorar acerca del concepto que tienen los niños acerca de la notación desarrollada de un número.

Nombre del Alumno: _____ Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan una serie de problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo. (Valor aparente y posicional)

1. Una con la línea el número y su forma desarrollada

4770	4000+700+7
4070	4000+700+70
7707	4000+700+70+7
4707	7000+70+7
4777	4000+70
7077	7000+700+7

2. Escriba los siguientes números en forma desarrollada

d) 3500

e) 3050

f) 3005

3. Escriba el valor que tiene el dígito 7 en cada número

d) 5678

e) 7024

f) 1702

g) 4007

Actividad No 10

Desarrollo del concepto de valor posicional

Objetivo: Explorar el concepto del valor posicional que tienen los niños de cuarto grado

Nombre del Alumno: _____ Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan una serie de problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. El valor posicional del 7 en el numeral 1,742,653 es: (Valor relativo)
2. Carla reunió L.32, 180 en una colecta del centro de alumnos. Indica el desarrollo que representa la cantidad de dinero reunida por Carla. (Valor posicional)
3. A qué número corresponde el desarrollo de $4\text{CM}+5\text{UM}+8\text{C}+3\text{U}$
4. Sumar $4\text{C}+5\text{D}+9\text{U}+300+400$

5. El problema que se les presentaba era: “En otro puesto de la feria, Jorge podía ganar un premio si descubría cuáles de los números que estaban entre el “60” y el “69 se hacían más grandes si se invertían los dígitos. ¿Con qué números ganaría Jorge los premios? (Valor posicional)

Actividad No 11

Desarrollo del concepto de valor posicional

Objetivo: Explorar acerca del concepto que tienen los niños en relación al valor posicional de un número.

Nombre del Alumno: _____ Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan una serie de problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. “Jorge quería dos juguetes de la tienda, uno costaba 34 pesos y el otro 25. A Jorge le dio curiosidad: ¿estaría el costo total de los juguetes en los 40tas, 50tas o 60tas? ¿Tú qué le dirías a Jorge? Explícame.”
2. “En un juego de la feria, cada pelota estaba marcada con números entre 11 y 99. Jorge recogió dos bolas y sumó los números. Después invirtió los dígitos de los dos números y los volvió a sumar. Haz lo que Jorge y di qué suma es mayor.”
3. En el problema se les decía: “Jorge vio trabajar toda la mañana al señor del sombrero amarillo. Había envuelto (en paquetes de 10) 134 caramelos para darlos de premios, pero necesitaba 260. Jorge quería saber: ¿cuántos le faltaban envolver?”

4. El problema respectivo era: “Jorge tiene 270 estampas. Compró dos álbumes: uno era para 132 estampas y el otro para 145. Jorge quería saber si le cabrían todas sus estampas en los dos álbumes.”

Actividad No 12

Desarrollo del concepto de valor posicional

Objetivo: Explorar acerca del concepto que tienen los niños en relación al valor posicional de un número.

Nombre del Alumno: _____ Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan una serie de problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. Un juego en la feria consistía en escribir números de forma que cuando se invirtieran los dígitos para formar un nuevo número, la suma estuviera entre 100 y 125 ¿Con qué números podría ganar Jorge?
2. El señor de la tienda le dijo a Jorge que podía comprar los caramelos sueltos, en paquetes de 10 cada uno o en cajas de 100. Si necesitaba 804, ¿de qué formas diferentes podía comprarlos? Después se dio cuenta que iba a necesitar 1200. ¿Cuántos más tenía que comprar?
3. El señor de la tienda le dijo a Jorge que se asomara a la bolsa para ver los dulces. Había dulces sueltos, paquetes de diez y cajas de cien. Jorge contó 2 cajas, 23 paquetes y nueve dulces sueltos. Jorge quería saber ¿cuántos dulces había ahí?

ANEXO 3

EVALUACIÓN FINAL

Actividad No.13

Conceptualización del valor posicional

Objetivo: Explorar los conocimientos que han adquirido los niños sobre el concepto de valor posicional

Nombre del Alumno: _____

Fecha: _____

Instrucciones: A continuación se le presentan una serie de problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

1. Juan tiene en su corral 2 centenas de pollitos, 3 decenas y 6 unidades en el gallinero.



a) ¿Cuántos pollitos hay por todos? (Zona de construcción).

b) ¿Cuántos dígitos tiene el número que representa la cantidad de pollitos? (Numeral completo).

c) Indique la posición de cada dígito (Valor posicional).

2. En la escuela de Sandra celebraron la feria en 3 días seguidos

En el primer día llegaron 4231 personas

En el segundo día llegaron 3524 personas

En el tercer día llegaron 3142 personas



a) ¿En qué día llegaron más personas?

b) ¿En qué día llegaron menos personas?

(Comparación de cantidades)

c) ¿Por qué?

3. Si tenemos 23 caballos:



a) ¿Cuántas decenas representan 23 caballos? (zona de construcción)

b) ¿Cuántas unidades representan 23 caballos? (Numeral completo)

2. Escribe el número que corresponda: (Valor posicional)

4 unidad =

15 unidades =

4 decenas =

5 decenas y 5 unidades =

4 decenas, 3 unidades =

4. El loro de Carlos come 1 decena y 3 unidades de semillas, mientras que el de Jorge come 3 decenas y 1 unidad. ¿Cuál de los loros come más? ¿Por qué? (Zona de construcción)

5. Escriba los siguientes números en forma desarrollada (Valor posicional)

g) 4700

h) 2051

i) 1019

Montana se convirtió en estado en 1889. Hawái se convirtió en estado 70 años más tarde.
¿Cuántas décadas habían pasado? Una década es igual a 10 años.

6. Jorge vio en la feria una computadora que mostraba casas que estaban en una larga fila. Las casas estaban numeradas empezando por el 325. Jorge apretó un botón y lo llevó a la casa 418.
¿Estaba Jorge más cerca de la casa 372 o de la 485? ¿Cómo sabes?

ANEXO 4

TRANSCRIPCIONES DE VIDEOS ACERCA DE ALGUNAS ACTIVIDADES GRUPALES REALIZADAS

Actividad 1

Grupo #1

Problema #1: Observemos la siguiente colección de fósforos. ¿Cuántos fósforos hay ahí?
Hacer lo necesario a fin de que cuando otro niño los vea, puedan decir rápidamente ¿Cuántos fósforos hay?

En este instante Jaime le comienza a dar lectura a las instrucciones, los demás niños escuchan atentamente.

Jaime: A continuación...

Investigador: Van a trabajar con el material que yo les di verdad, con el material concreto

En este momento Luis Miguel señala la figura de los fósforos que aparece impresa en la actividad.

Luis Miguel: Aquí contamos

El investigador se acerca al grupo para brindar apoyo y le da lectura a la instrucción señalando con el dedo.

Investigador: Observemos la siguiente colección de fósforos.

Ahora el investigador señala la colección de fósforos del material concreto y afirma:

Investigador: Se refiere a esta colección de fósforos que tienen ahí, Cuántos fósforos hay ahí?

¿Qué tienen que hacer?

Esteban: Contarlos

Investigador: Exacto, contarlos.

Al unísono Esteban y Luis contestan: Veinticinco

El investigador señalando con el dedo índice: Entonces escriban la respuesta ahí.

Jaime: Aah

Esteban: Enseña yo la escribo.

Jaime: Enseña, enseña quiero ver algo

Esteban: Espérate voy a poner veinticinco

Problema #2: De la siguiente colección de objetos, forme un grupo de 12 lápices y un grupo de 21 tornillos.

Esteban le da lectura a la pregunta número dos: De la siguiente colección de objetos, forme un grupo de doce lápices y un grupo de veintiún tornillos.

El investigador les proporciona el material concreto y señalando con el dedo índice afirma:

Con este material van a trabajar

Esteban apunta con el lápiz los tornillos y afirma: Voy a contarlos yo, contá los tornillos voz

Jaime comienza a contar los tornillos y Esteban los lápices, el conteo lo realizan de uno en uno.

Esteban: Once hay

Investigador: Muy bien

Jaime: Hay veinticinco por todos

Luis M: Los tornillos? Esperame, uy que montón.

Investigador: ¿Esta seguro Jaime que los conto correctamente?

Jaime se queda pensativo, y los vuelve a contar

Jaime: Hay veintiún tornillos y doce lápices

Investigador: Muy bien Jaime, contó bien la cantidad de tornillos, ahora verifique si hay doce lápices. Haber, agrúpelos de tal forma que pueda contarlos rápidamente.

Esteban: No, hay once lápices. Uno, dos, tres, cuatro, cinco. Seis, siete, ocho, nueve, diez, once lápices

Jaime: Ya se, de cinco en cinco.

Jaime hizo dos agrupaciones de cinco y uno suelto.

Jaime: Si, hay once

Investigador: muy bien

Jaime: ¿Cuál representa una cantidad mayor?

Esteban: Los tornillos

Jaime: ¿Porque hay mas tornillos que lápices?

Luis M: Porque tiene más.

Jaime: ehhhh

Esteban: Oí este porque es mayor que los lápices, un tornillo mayor que un lápiz

Esteban: Porque tiene más

Jaime: La cantidad niño

Luis M: Los tornillos veinte ehh veintiuno y los lápices once

Jaime escribe: Los tornillos veinte y los lápices once

Problema #2: Tenemos una colección de frutas ordenadas de diferentes formas:

¿Cuántas frutas hay en cada grupo?

El investigador proporciono una manzana, dos uvas, tres zanahorias y cuatro limones en material concreto.

Los niños se mostraron muy animados y comenzaron a palpar las frutas.

Investigador: Formen un grupo de cada fruta

Esteban formó un grupo de cada fruta, conto la cantidad de frutas que habían en cada grupo y

afirmo: Dos manzanas, dos uvas, tres manzanos mm, tres zanahorias y cuatro limones.

Jaime: Nooo, hay una manzana

Investigador: ¿Esteban verifique la cantidad de manzanas?

Esteban: Espere, mmm si, hay una manzana.

Investigador: Muy bien

Luis Miguel: Si, escribilo

Esteban: Perate, entonces hay una manzana, dos uvas, tres zanahorias y cuatro limones

Investigador: Así es, muy bien.

Actividad No2

Grupo #3

Problema #1: Empieza con un grupo de diez flores. Súmale una flor a este grupo. ¿Cuántas flores tienes ahora? Especifica cuantas flores hay en el lugar de las decenas y las unidades.

El investigador les proporciona el material concreto, de once flores.

Jaime: A continuación se le presentan 3 problemas, resuélvalos de forma clara y ordenada. Explique siempre su respuesta y no borre lo que hace, aunque lo considere malo.

Cecilio: No borre lo que hace

Víctor: Formen el grupo de diez, dame las cartas a mí. Pásamelas.

Víctor comienza a contar las flores de forma aproximada.

Cuatro, diez. Grupo de diez flores. Súmale una flor a este grupo.

Joseph: Once

Investigador: Correcto, hay once flores.

Víctor: Especifica cuantas flores hay en el lugar de las decenas y unidades

Víctor: Hay una uni... hay perate. Hay una decena y una unidad.

Cecilio: No, porque falta una para las decenas.

Víctor: Ehhhhh

Joseph: Si porque hay once

Investigador: Haber Cecilio, ¿Cuántas unidades hay en una decena?

Cecilio: Hay diez

Investigador: Entonces cuantas decenas hay?

Cecilio: Eeeh, unaaa..

Investigador: Muy bien, entonces tenemos una decena y cuantas unidades hay?

Víctor y Joseph contestan casi al unísono: hay unaaaa

Cecilio: Si, hay unaaa

Investigador: Muy bien, entonces ¿Cuántas unidades y decenas hay?

Víctor y Cecilio contestan al unísono: Hayy una unidad y unida decena

Joseph: Siii, hay una unidad y una decena

Investigador: Muy bien niños, ahora escriban su respuesta.

Víctor: Enseña yo la escribo.

Víctor, escribió: Hay una unidad y una decena